

# 10 Bioelektrische Quellen

## 10.1 Ursprung bioelektrischer Quellen

### 10.1.1 Elektrische Felder im Organismus

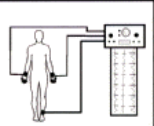
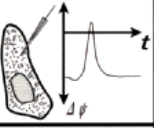


Organism		Elektrodynamics <i>Maxwell equations</i>
Cell		Phenomenological thermodynamics <i>Nernst-Planck equation</i>
Supramolecular structures		Statistical thermodynamics <i>Poisson-Boltzmann equation</i>
Atomar and molecular structures		Wave and quantum mechanics <i>Schrödinger equation</i>

Abbildung 10.1: Hierarchie elektrischer Strukturen. [14]

Elektrische Felder treten im menschlichen Organismus auf allen Skalen auf. Je nach Struktur verwendet man eine andere Beschreibung, um ihr Auftreten zu verstehen. Auf der makroskopischen Skala des gesamten Körpers sind die Maxwell Gleichungen am besten geeignet. Auf der Skala einzelner Zellen ergibt der Ansatz der phänomenologischen Thermodynamik interessante Erkenntnisse. Bei supramolekularen Strukturen liefert die statistische Thermodynamik interessante Ergebnisse, während für atomare und molekulare Strukturen die Quantenmechanik benötigt wird.

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit den elektrischen Feldern, welche einzelne Organe erzeugen, sowie mit den Möglichkeiten, diese über Körper-

externe Messungen zu bestimmen und für diagnostische Zwecke zu nutzen.

Viele Funktionen des menschlichen Körpers werden durch elektrische Signale gesteuert. Die Nervenzellen des Gehirns verarbeiten ankommende elektrische Signale von den peripheren Nerven und Sinnesorganen und senden Signale aus, die die Bewegung der Muskeln steuern. Der Herzschlag wird ebenfalls durch elektrische Signale gesteuert. Im Vordergrund der Abbildung bioelektrischer Quellen stehen daher auch das Herz und das Hirn. Die wichtigsten Anwendungen umfassen das Elektrokardiogramm (EKG), das Elektromyogramm (EMG), sowie das Elektroenzephalogramm (EEG).

### 10.1.2 Ruhemembranpotenzial

Der Ursprung bioelektrischer Signale sind Potentialdifferenzen zwischen dem Inneren und Äußeren biologischer Zellen.

Die Doppellipidschicht einer Zelle ist elektrisch isolierend und besitzt eine hohe Kapazität von ungefähr  $1 \mu F/cm^2$  (Dicke der Zellmembran:  $\approx 5 nm$ ). Insbesondere die Membranen von Muskel- und Nervenzellen sind in ihrem elektrischen Verhalten steuerbar. Diese Membrane enthalten Proteine, die zwischen ihren Ketten und Kreuzungspunkten Kanäle freilassen, und durch die Ionen wie  $K^+$ ,  $Na^+$ ,  $Ca^{++}$ ,  $Cl^-$  gelangen können. Die Durchlässigkeit dieser Kanäle kann gesteuert werden, und sie können selektiv wirken. Der passive Transport erfolgt entweder durch elektrostatische Kräfte oder durch Diffusion auf Grund eines Konzentrationsgradienten. Es gibt auch Proteinstrukturen, die unter Aufwendung von Energie bestimmte Ionen auch gegen diese passive Transportrichtung von innen nach außen (oder umgekehrt) pumpen können. Die wichtigsten Ionenpumpen sind die, die beständig  $K^+$  ins Innere der Zelle und  $Na^+$  nach

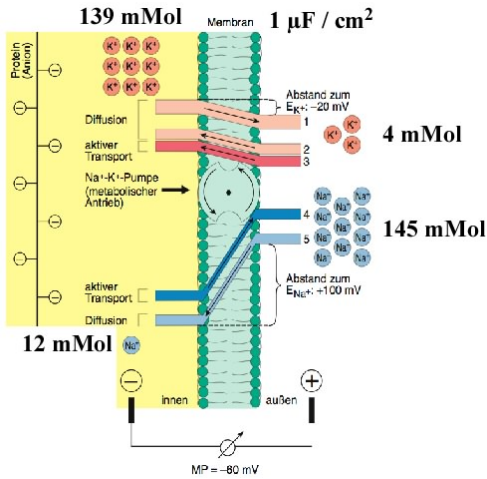


Abbildung 10.2: Entstehung des Ruhemembranpotenzials. Eingezeichnet sind die Wesentlichen Prozesse für den Transport von  $K^+$  und  $Na^+$  durch die Zellmembran. [9] (nachbearbeitet)

außen befördern. Es gibt auch Proteine, die als Pfortner für Kanäle fungieren und so zum Beispiel für bestimmte Ionenarten den passiven Transport möglich machen oder verhindern.

Durch die Summe dieser Teilprozesse entsteht eine ungleiche Ionenkonzentration zwischen dem Zellinneren und Zelläußeren, und daher ein Potenzial, das den Ruhezustand der Zelle charakterisiert. Dieses wird als **Ruhemembranpotenzial** bezeichnet.

### 10.1.3 Zell(de)polarisation

Das Ungleichgewicht der Ionenkonzentrationen im Ruhezustand wird als Polarisation der Zellen bezeichnet. Für eine Ionenart wird die daraus resultierende Potenzialdifferenz durch die *Nernst'sche Gleichung* gegeben. Zwei verschiedene Konzentrationen  $c_1, c_2$  erzeugen einen Energieunterschied auf beiden Seiten der Membran von  $\Delta E = e \cdot \Delta U$  für geladene Teilchen. Nach der Boltzmann-Statistik gilt

$$\frac{c_1}{c_2} = e^{-\frac{e \Delta U}{kT}},$$

und daraus folgt die Nernst'sche Gleichung

$$\Delta U = -\frac{kT}{e} \ln \left( \frac{c_1}{c_2} \right).$$

Sind mehrere Konzentrationsgradienten für unterschiedliche Ionen parallel vorhanden, so sind deren Einflüsse auf die sich ergebende Potenzialdifferenz durch die relativen Beweglichkeiten  $P_i$  gewichtet, z.B.:

$$\Delta U = \frac{kT}{e} \cdot \ln \left( \frac{P_K c_K^a + P_{Na} c_{Na}^a + P_{Cl} c_{Cl}^i}{P_K c_K^i + P_{Na} c_{Na}^i + P_{Cl} c_{Cl}^a} \right).$$

Der obere Index zeigt an, ob die Konzentration intrazellulär ( $i$ ) oder extrazellulär ( $a$ ) gemeint ist. Diese Gleichung wird als *Goldmann-Gleichung* bezeichnet. Da die Beweglichkeit der  $K^+$ -Ionen etwa 30 mal so groß ist wie für die  $Na^+$ -Ionen, dominiert in der Regel der Einfluß von  $K^+$ .

Durch äußere Einflüsse, wie zum Beispiel elektrische Felder (konduktile Erregung) oder das Vorhandensein bestimmter chemischer Botenstoffe (nicht-konduktile Erregung), kann die Permeabilität der Zellmembran verändert werden. Wenn die Ionenkanäle "aufgemacht" werden, dann erhöht sich die Ionenbeweglichkeit durch die Membran erheblich, und die passiven Transportmechanismen überwiegen verglichen mit dem "mühsameren" Pumpemechanismus.

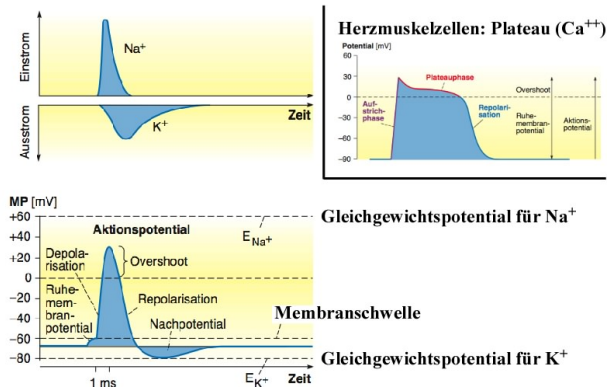


Abbildung 10.3: Ionenströme, Depolarisation und Aktionspotential. [9] (nachbearbeitet)

Die Folge des Aufmachens der Ionenkanäle ist ein rascher Abbau des negativen Ruhepotenzials. Durch

die unterschiedlichen Reaktionsgeschwindigkeiten ( $Na^+$ -Kanäle öffnen im Allgemeinen schneller als  $K^+$ -Kanäle) kommt es sogar zu einem kurzzeitigen Überschießen (Overshoot) des Membranpotenzials in den positiven Bereich. Durch die Ionenpumpen wird nach dieser Depolarisation der Zellen der Ruhezustand wieder hergestellt.

In der Abbildung 10.3 sind typische Zeitverläufe des Aktionspotenzials dargestellt. Bei den Herzmuskelzellen tritt ein Plateau nach dem Überschießen auf, das durch den  $Ca^{++}$ -Ionenstrom gesteuert wird. Die Anregung muß eine bestimmte Schwelle von etwa  $+20\text{ mV}$  gegenüber dem Ruhepotential überschritten werden, dann erfolgt der weitere Ablauf selbstständig. Liegt die Anregung unter der Schwelle, dann kommt es nicht zur Depolarisation. Bei einer Wiederholung des Reizes steigt der Schwellwert an, und sinkt mit dem zeitlichen Abstand zur letzten Depolarisation auf den Gleichgewichtswert ab.

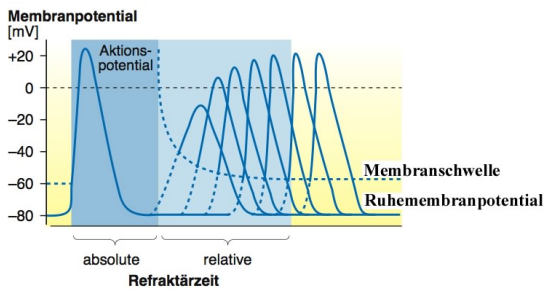


Abbildung 10.4: Veranschaulichung der Refraktärphase an Nervenzellen. [9] (nachbearbeitet)

Es gibt eine Phase nach einem Reiz, in dem keine neue Erregung möglich ist. Dies ist die sogenannte **totale Refraktärphase**. In der sich anschließenden **relativen Refraktärphase** ist eine Erregung nur mit reduzierter Amplitude möglich und es gilt ein höherer Schwellenwert.

### 10.1.4 Erregungsleitung

Die Erregung wird entlang von Nervenfasern weitergeleitet. Dabei gibt es zwei Typen der Erregungsleitung.

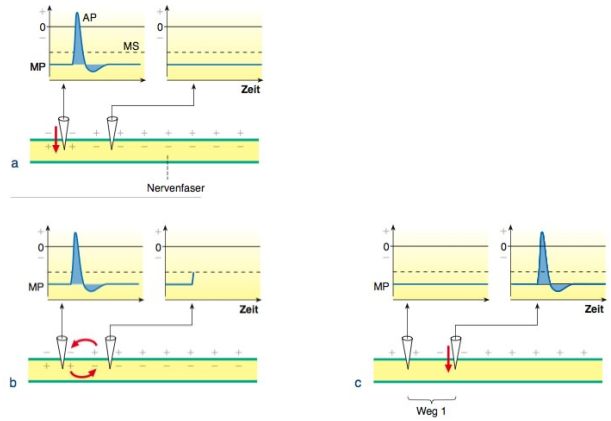


Abbildung 10.5: Kontinuierliche Erregungsleitung. a) Aktionspotential nur bei der linken Ableitungsstelle; b) Kationeneinstrom während Erregung; c) Aktionspotential bei rechter Ableitungsstelle erreicht. [9]

Die **kontinuierlichen Erregungsleitung** erfolgt entlang von Nervenfasern *ohne* Myelinscheide (siehe Kapitel 10.1.5). Infolge der Kationeneinströmung während der Erregung hat das Potenzial seinen positiven Pol im Intra- und seinen negativen Pol im Extrazellularraum (siehe Abbildung 10.5). Am übrigen Faserteil liegt die umgekehrte Polung vor, daher entsteht eine (zweite) Potentialdifferenz *entlang* der Membran. Auf Grund des elektrischen Feldes strömen Kationen im Intrazellularraum von von der linken zur rechten Elektrodenposition in der Abbildung 10.5, und im Extrazellularraum entgegengesetzt (geschlossener Stromkreis). Dadurch kommt es zu einer elektrischen Depolarisation im Bereich der rechten Elektrode, und wenn dort der Schwellenwert erreicht wird, dann wird ein Aktionspotential ausgelöst und die Erregung hat sich insgesamt von links nach rechts entlang der Nervenfaser ausgebreitet. Bei der kontinuierlichen Erregungsleitung wird die Erregung jeweils auf die Nachbarbezirke der Nervenfaser übertragen. Besitzt die Nervenfaser jedoch Myelinscheiden, die einen hohen Isolationswiderstand haben, dann breitet sich die Erregung von einer Lücke in der Myelinscheide zur nächsten aus (von einem "Ranvierschem Schnürring" zum nächsten; siehe Kapitel 10.1.5).

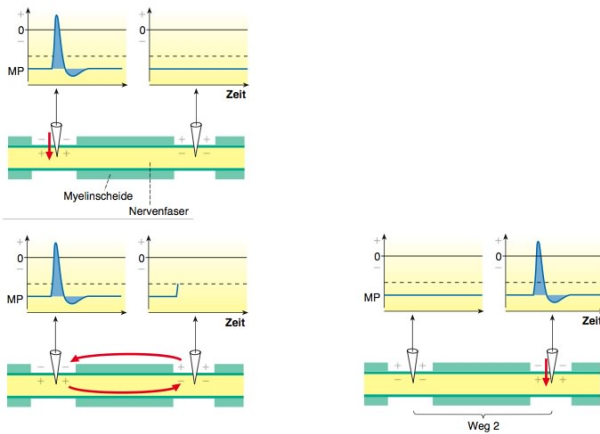


Abbildung 10.6: Saltatorische Erregungsleitung. [9]

Da die Erregung in diesem Fall der sogenannten **saltatorischen Erregungsleitung** von Lücke zu Lücke springt, pflanzt sie sich schneller fort als bei der kontinuierlichen Erregungsleitung. (Bei der Multiplen Sklerose - MS - zerfallen die Myelinscheiden im Zentralnervensystem, bevorzugt um die Hirnventrikel. Dadurch wird die Erregungsleitung verzögert und zum Teil sogar unterbrochen. Folge sind Störungen in allen Teilen des ZNS.)

### 10.1.5 Nervenzellen

Eine **Nervenzelle (Neuron)** ist eine auf Erregungsweiterleitung spezialisierte Zelle. Sie gliedert sich in 3 Abschnitte (entsprechend der Richtung des Erregungsablaufs):

- **Dendriten:** Rezeptive Strukturen,
- **Neurit (Axon, Nervenfaser):** Effektorische Strukturen,
- **Perikaryon (Soma):** Zelleib; Stoffwechselzentrum.

In der Abbildung 10.7 sind links Nervenzellen mit axonalen Fortsätzen zu sehen. Zu Erkennen sind die Markscheiden und die schon erwähnten Ranvierschen Schnürringe. Die Markscheiden bestehen aus markhaltigen oder myelinisierten Fasern und isolieren die Axone gegen die Umgebung. Bei den Ranvierschen Schnürringen steht das Axon in direkter

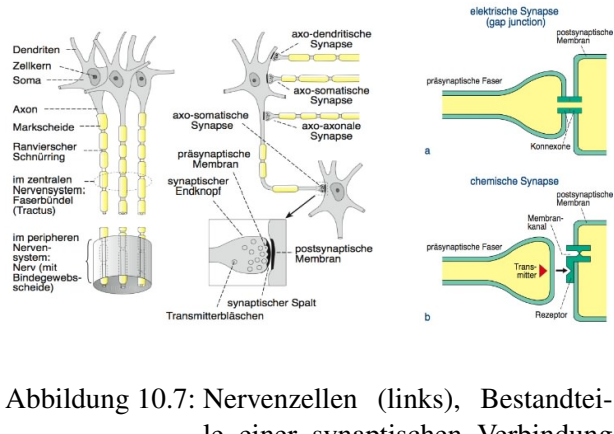


Abbildung 10.7: Nervenzellen (links), Bestandteile einer synaptischen Verbindung (Mitte) und Erregungsübertragung durch elektrische und chemische Synapse (rechts). [9]

Verbindung mit dem extrazellulären Raum. Im zentralen Nervensystem sind die Axone in der Regel zu Faserbündeln zusammengefaßt, im Bereich des peripheren Nervensystems zu Nervensträngen und Nerven. In der Mitte der Abbildung 10.7 sind Bestandteile einer synaptischen Verbindung und typische Lokalisationen von Synapsen an einem Neuron gezeigt.

Im Nervensystem werden Informationen in Sequenzen von Aktionspotentialen verschlüsselt und über die Nervenfasern weitergeleitet. Zur weiteren Verarbeitung müssen diese Informationen auf andere Neurone übertragen werden. Die Weitergabe der Information erfolgt an Strukturen, die unter dem Oberbegriff Synapsen zusammengefaßt sind. Es gibt zwei Typen von Synapsen (siehe Abbildung 10.7 rechts): beim ersten Typ sind prä- und postsynaptische Anteile über Proteine (Konnexone), die tunnelartige Verbindungen (*gap junctions*) bilden, direkt miteinander in Kontakt. Man spricht von **elektrischen Synapsen**, da die Erregungsübertragung durch elektrotonische Ströme durch diese Tunnel erfolgt. Beim zweiten Typ, der **chemischen Synapse**, sind die Membranen der prä- und postsynaptischen Strukturen durch einen Spalt voneinander getrennt. Die Erregungsweiterleitung erfolgt über chemische Substanzen, die sogenannten Transmitter.



### 10.1.6 Feldquellen

Die auf den Axonen entstehenden Quellen bei der Signalweiterleitung können als Strom-Quadrupol modelliert werden, und die elektrischen Vorgänge hinter den Synapsen können als Stromdipole modelliert werden (Abbildung 10.8 links).

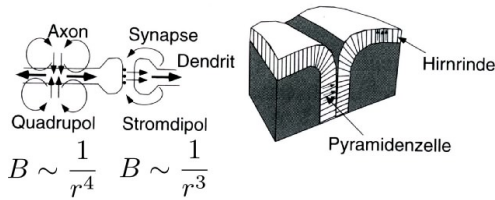


Abbildung 10.8: Felder von Axon und Synapse (links); Pyramidenzellen in der Hirnrinde (rechts). [10]

Die elektrischen und magnetischen Quellen eines Quadrupols fallen sehr schnell mit dem Abstand von der Quelle ab. Zusätzlich dazu sind die Axone kreuz und quer im Gehirn verteilt, die gleichzeitig aktiv sind. Daher kann man die Signale dieser Quellen an der Haut des Kopfes nicht mehr messen. Die von den Synapsen ausgehenden Signale haben zwar eine größere Reichweite, aber wegen der ebenfalls stochastischen Verteilung hebt sich ihre Wirkung im Mittel auf. Nur in den Pyramidenzellen, die sich in einer Schicht der Hirnrinde befinden, summieren sich die Signale (Abbildung 10.8 rechts).

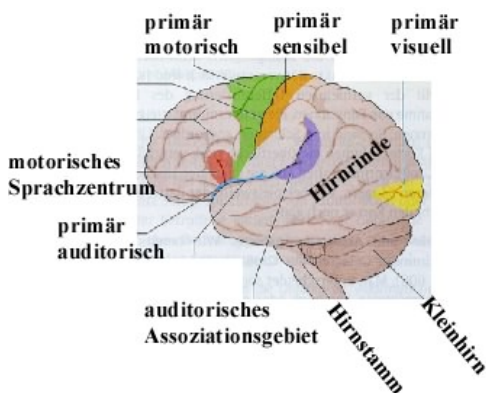


Abbildung 10.9: Hirnrindenregionen. [11] (nachbearbeitet)

Die Großhirnrinde (zerebraler Kortex) ist beim Men-

schen besonders hoch entwickelt, und sie ist für die Eigenschaften verantwortlich, die den Menschen vom Tier unterscheiden. Bestimmten Gebieten der Großhirnrinde kommen spezifische Funktionen zu (siehe Abbildung 10.9).

Wenn 10000 Nervenzellen, die in  $1\text{mm}^3$  der Hirnrinde sind, gleichzeitig "feuern", dann entstehen auf der Kopfhaut elektrische Spannungen von einigen  $10\mu\text{V}$  beziehungsweise magnetische Flußdichten von einigen  $100\text{fT}$ .

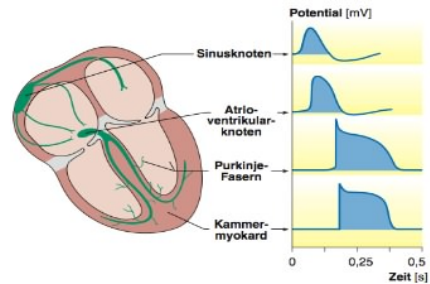


Abbildung 10.10: Herzerregung. [9]

Zum Vergleich: die elektrische Depolarisation des Herzmuskels führt zu etwa hundertfach größeren Signalen an der Körperoberfläche. Die auf dem Herzmuskel auftretenden Stromdichten betragen bis zu einigen  $\text{mA}/\text{mm}^2$ , und die Signale an der Haut des Körpers erreichen einige  $\text{mV}$  (einige  $10\text{pT}$ ). Diese werden in der Elektrokardiographie (EKG) mit Elektroden und hochohmigen Messverstärkern registriert (siehe Kapitel 3.4.3 und 10.2.4). Bei den Nervensignalen heißt das Verfahren Elektroenzephalographie (EEG). Eine ausführlichere Besprechung erfolgt in Kapitel 10.2.2.

### 10.1.7 Biomagnetische Signale

Jedem Elektrogramm ist ein Magnetogramm zugeordnet. Die Quellen biomagnetischer Signale sind daher ebenfalls die im Innern des Körpers entstehenden elektrischen Signale. Zu den **Vorteilen** biomagnetischer gegenüber bioelektrischen Signalen gehört, dass die biomagnetischen Signale zwischen dem Entstehungsort und dem Aufnahmeort an der Körperoberfläche kaum gestört werden. Das liegt daran, dass die magnetische Permeabilität praktisch

überall  $\mu_r = 1$  ist. Selbst paramagnetische Substanzen weichen von diesem Wert nur in der Größenordnung  $10^{-6}$  ab. Das hat zur Folge, dass keine Verzerrungen auftreten. Bei gleichzeitiger dreidimensionaler Aufzeichnung an mehreren Stellen ist daher eine viel präzisere Lokalisation möglich, was insbesondere für die Forschung sehr interessant ist.

Die entsprechende elektrische Größe ist die (relative) Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_r$ , die in Luft 1 ist, und in Wasser etwa  $\epsilon_r = 81$  beträgt. Daher werden die elektrischen Dipolfelder in inhomogenen Gebieten verzerrt. Ein anderer Vorteil ist die berührungslose Aufnahme biomagnetischer Signale. Damit entfallen alle Schwierigkeiten der Signalableitung mit Elektroden, die bei bioelektrischen Verfahren auftritt.

Der wesentliche **Nachteil** ist die Kleinheit der zugehörigen Magnetfelder; sie bewegen sich im Bereich von

$$B = 10^{-11} \dots 10^{-13} T .$$

Zum einen werden daher sehr sensitive Sensoren benötigt (SQUIDS, siehe Kapitel ...), und zum anderen ist eine sorgfältige Abschirmung notwendig. Größenordnungen für Störquellen:

$$\begin{aligned} B_{Erde} &\approx 5 \cdot 10^{-5} T \\ B_{Netzkabel} &\approx 10^{-7} T \\ B_{magn. Verunreinigungen in Lunge} &\approx 10^{-9} T \end{aligned}$$

Die Unterdrückung von Störsignalen gelingt mit Subtraktionsmessungen. Die zugrunde liegende Idee ist, dass weit entfernte Störquellen an zwei nahe liegenden Messorten das gleiche Signal erzeugen, aber Magnetfelder von biologischen Quellen einen starken Gradienten auf dieser Skala aufweisen. Die Messungen mit zwei gegenseitig gewickelten supraleitenden Drahtspulen an zwei nahe liegenden Orten (wenige cm auseinander) werden subtrahiert, und Störsignale lassen sich um einen Faktor von etwa 100 unterdrücken. Solche Messgeräte werden Gradiometer genannt. Zusätzlich werden magnetisch abgeschirmte Kabinen benutzt und Filter eingesetzt.

## 10.1.8 Quellenmodelle

Bei den Quellenmodellen wird der menschliche Körper aus dem Blickwinkel der elektromagnetischen Feldtheorie betrachtet. Es ergibt sich, dass eine beliebige Verteilung von eingepprägten Strömen im Körper als Überlagerung von Stromdipolen aufgefaßt werden kann. Bei der Abbildung soll die Verteilung der Stromdipole im Körper dargestellt werden. Im Extremfall wird die Stromdipolverteilung auf dem Herzen durch nur einen einzigen Stromdipol, den Herzvektor, approximiert.

Grundsätzlich setzt sich die gesamte Stromdichte im Körper aus einer eingepprägten Stromdichte  $\vec{j}_i$  durch bioelektrische Ströme, und dem Rückstrom im Volumenleiter zusammen:

$$\vec{j} = \vec{j}_i + \sigma \vec{E} .$$

Mit dem elektrischen Potential  $\varphi$  erhält man

$$\vec{j} = \vec{j}_i - \sigma \vec{\nabla} \varphi .$$

Unter der Annahme, daß die Leitfähigkeit  $\sigma$  des Gewebes homogen ist, und wegen  $\vec{\nabla} \vec{j} = 0$  (keine Ladungsanhäufung möglich; vgl. Magnetostatik) erhält man die Poisson-Gleichung

$$\vec{\nabla} \vec{j}_i = \vec{\nabla} (\sigma \vec{\nabla} \varphi) + \vec{\nabla} \vec{j} = \sigma \Delta \varphi(\vec{r}) .$$

In den Grundgleichungen der Elektrostatik steht an Stelle des Quellterms  $\vec{\nabla} \vec{j}_i$  die freie Ladungsdichte. Die Lösung der Poisson-Gleichung ist

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\sigma} \int d^3r' \frac{\vec{\nabla} \vec{j}_i}{|\vec{r} - \vec{r}'|} .$$

Es ist sinnvoll, diese Lösung noch weiter umzuformen. Mit der Definition  $\psi(\vec{r}, \vec{r}') := \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$  und  $\vec{\nabla}(\psi \vec{j}_i) = \psi \vec{\nabla} \vec{j}_i + \vec{j}_i \cdot \vec{\nabla} \psi$  bekommt man

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\sigma} \int d^3r' \left\{ \vec{\nabla}(\psi \vec{j}_i) - \vec{j}_i \cdot \vec{\nabla} \psi \right\} .$$

Mit dem Gaußschen Satz verschwindet der erste Teil des Integrals, da sich auf einer ausreichend großen Hüllfläche keine eingepprägten Ströme befinden:

$$\int d^3r' \vec{\nabla}(\psi \vec{j}_i) = \oint d\vec{f}(\psi \vec{j}_i) = 0$$

Mit dem Gradienten der Hilfsfunktion  $\vec{\nabla}\psi = \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$  sieht man letztendlich, daß sich das Potential  $\varphi(\vec{r})$  aus einer Überlagerung von vielen Stromdipolen  $\vec{j}_i \cdot d^3r$  zusammensetzt:

$$\varphi(\vec{r}) = +\frac{1}{4\pi\sigma} \int d^3r' \cdot \vec{j}_i \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}.$$

Man kann sich einen Stromdipol auch als einen sehr kurzen stromdurchflossenen Pfad der Länge  $\vec{l}$  vorstellen:  $\vec{j}_i \cdot d^3r \approx \frac{I}{A} \cdot A\vec{l} = I \cdot \vec{l}$ . Zur numerischen Behandlung wird der Körper in diskrete Volumenelemente aufgeteilt, mit einem zugehörigen mittleren Stromdipol.

Die Mediziner interessieren nur die eingepprägten Ströme  $\vec{j}_i$ , gemessen werden beim EEG aber zusätzlich die Volumenströme an der Haut. Bei guten Rekonstruktionsalgorithmen werden beide Teile berücksichtigt, aber nur die eingepprägten Ströme im Ergebnis dargestellt. Zur genauen Berechnung der Volumenströme muß die genaue Lage der Organe, die äußere Form des Körpers und die Impedanzen der beteiligten Gewebearten genau bekannt sein. Diese Informationen können zum Teil aus der MR-Tomographie und der Impedanztomographie gewonnen werden. Letztendlich ist dieses Vorgehen jedoch sehr aufwendig, so daß üblicherweise nur einfache Modelle benutzt werden, die zum Beispiel den Kopf als Kugel approximieren.

## 10.2 Messmethoden

### 10.2.1 Übersicht

Die an der Körperoberfläche abgeleiteten Signale sind eine Überlagerung der elektrischen Aktivität des gesamten Nerven-, Muskel-, und sensorischen Systems. Eine gewisse Selektion der Signalkomponenten erfolgt durch geeignete Ortswahl der Elektrodenanordnung. Eine Auswahl der bioelektrischen Untersuchungsmethoden:

- Elektrokardiogramm (EKG): siehe Kapitel 3.4.3 und 10.2.4

- Elektroenzephalogramm (EEG): siehe Kapitel 10.2.2
- Elektromyogramm (EMG): liefert ein Bild der Muskerregung und wird zum Beispiel in der Sportmedizin eingesetzt. Die Amplitude der Signale an der Hautoberfläche ist in der Größenordnung von  $100 \mu V$ .
- Elektroretinogramm (ERG): macht die Lichtreizung im Auge sichtbar. Die wesentlichen Informationen stecken in Amplituden und Latenzzeiten der detektierten Wellen.
- Elektrookulogramm (EOG): gibt Aufschluß über die Augenstellung, so sind motorische Einflüsse diagnostizierbar.

Seltener angewendete Verfahren sind:

- Elektroolfaktogramm: Reizung des Geruchsinns
- Elektrogastrogramm: Aufzeichnung der Aktivität der Magenmuskulatur
- Elektrohysterogramm: Aufzeichnung der Aktivität der Uterusmuskulatur
- Elektordermatogramm: Aufzeichnung der elektrischen Potenzialverteilung auf der Haut
- Elektroneurogramm: Aufzeichnung von intrazellulären elektrischen Potenzialen

### 10.2.2 Elektroenzephalogramm (EEG)

Bei dem Elektroenzephalogramm (EEG) werden von der Schädeloberfläche Potentialschwankungen abgeleitet, die in der Hirnrinde entstehen. Die zugrunde liegenden Ströme entstehen durch synaptische Prozesse in der Großhirnrinde (zerebraler Kortex). Die Entstehung von Feldpotentialen und zugehörigen Magnetfeldern im Extrazellularraum des Zentralnervensystems ist in der Abbildung 10.11 skizziert.

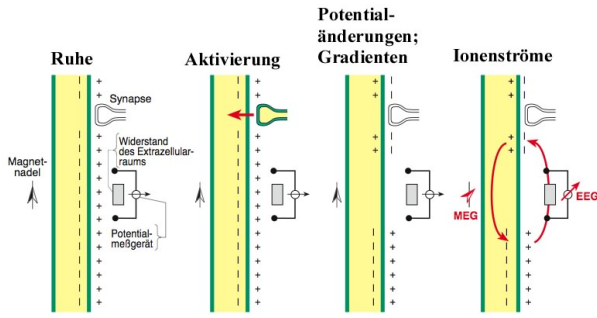


Abbildung 10.11: Grundlagen der Entstehung von Potenzialen (EEG) und Magnetfeldern (MEG). [9] (nachbearbeitet)

Dort ist ein zunächst im Ruhezustand befindlicher langgestreckter neuronaler Fortsatz (z.B. ein Dendrit) zu sehen. Der erste Schritt für die Entstehung bioelektrischer Signale ist die Aktivierung einer Synapse und die damit verbundene lokal begrenzte Depolarisation. Die zugehörigen "primären" transmembranösen Ionenströme sind durch den roten Pfeil in der Abbildung angedeutet. Als Folge davon entstehen entlang der Membran lokale Membranpotentialänderungen und Potentialgradienten. Durch die Potentialgradienten getrieben fließen "sekundäre" Ionenströme sowohl im Intra- als auch im Extrazellulärraum. Der extrazelluläre Ionenstrom erzeugt am Widerstand des Extrazellulärraums die Feldpotentiale, die im EEG dargestellt werden. Durch seine größere Bündelung ist der intrazelluläre Ionenstrom in erster Linie für die Ausbildung der Magnetfelder beteiligt, die im Magnetoenzephalogramm (MEG) gemessen werden. Diese Magnetfelder sind senkrecht zum Stromfluß orientiert.

In der Abbildung 10.12 wird gezeigt, wie die einzelnen Feldpotentiale in der Hirnrinde entstehen.

Abgebildet ist ein langgestrecktes, vertikal orientiertes Neuron der Hirnrinde sowie 3 intrazelluläre Elektroden (Membranpotentiale) und 3 zugehörige extrazelluläre Elektroden (Feldpotentiale). Ein Reiz (elektrische Stimulation) löst ein Aktionspotential in der afferenten Faser aus. Der Zeitpunkt der Reizauslösung ist in den Potentialmessungen mit ei-

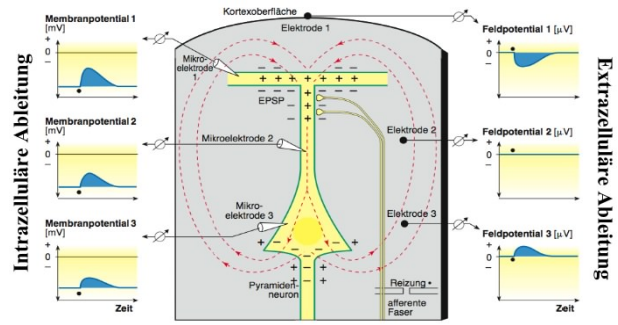


Abbildung 10.12: Entstehungsmechanismen der Feldpotentiale in der Hirnrinde. [9] (nachbearbeitet)

nem Punkt markiert. An den Synapsen erfolgt ein Einwärtsstrom von positiv geladenen Ionen, und im Bereich der Mikroelektrode 1 entsteht ein exzitatorisches postsynaptisches Potential (EPSP). Durch die entstandene Potentialdifferenz zu den übrigen Membranabschnitten (Plus- und Minuszeichen in der Abbildung) erfolgen intra- und extrazelluläre Ionenströme (in der Abbildung durch unterbrochene Pfeile dargestellt). Durch den Zufluß positiver Ladungen finden auch im Bereich aller Mikroelektroden Depolarisationen statt, die mit zunehmendem Abstand in Amplitude und Steilheit abnehmen. Der Abstrom von positiven Ionen aus dem Extrazellulärraum in das Neuron erzeugt im Bereich der oberflächennahen extrazellulären Elektrode 1 ein negatives Feldpotential. Da die positiven Ionen auf die extrazelluläre Elektrode 3 zuströmen, wird dort ein positives Feldpotential gemessen. Am Umkehrpunkt selbst (extrazelluläre Elektrode 2) ist kein Potential meßbar. Wenn die aktivierte exzitatorische Synapse am tiefen Ende des Neurons liegt, dann kehren sich die Ionenströme und die Vorzeichen der gemessenen Signale um. Außer den EPSP gibt es auch inhibitorische postsynaptische Potentiale (IPSP), die dann entstehen, wenn negative Ionen einströmen oder positive ausströmen. Erfolgt die Aktivierung einer inhibitorischen Synapse oberflächennah, dann kehren sich ebenfalls die Ionenströme um, verglichen mit dem ausführlich besprochenen Fall für oberflächennahe exzitatorische Synapsen.

Die Auslösung einer wellenförmigen Potenzialfol-



ge, die in der Regel beim Gehirn vorliegen, kommt durch gruppierte Aktionspotentiale in der afferenten Faser zustande.

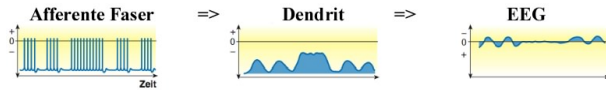


Abbildung 10.13: Entstehung einer wellenförmigen Potenzialfolge durch gruppierte Aktionspotentiale einer afferenten Faser. [9] (nachbearbeitet)

Die aufsteigenden Aktionspotentiale erzeugen an den oberflächlichen Dendriten des Neurons einzelne EPSP aus, die sich überlagern zu größeren Depolarisationen. Es kommt zu wiederholten negativen Feldpotentialschwankungen an der Hirnoberfläche. Wenn die afferenten Impulsgruppen periodisch aufeinander folgen, dann sind die Potentialschwankungen sinusförmig. Die sinusförmigen Signalschwankungen werden mit Wechselspannungsverstärkern registriert und als EEG bezeichnet.

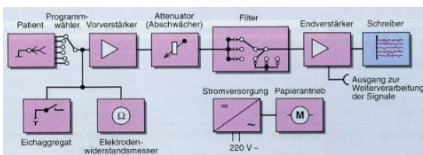


Abbildung 10.14: Ableitetechnik EEG. [22]

Bei dem Menschen werden verschiedene Elektroden am Schädel platziert, um die Ableitungen zu messen.

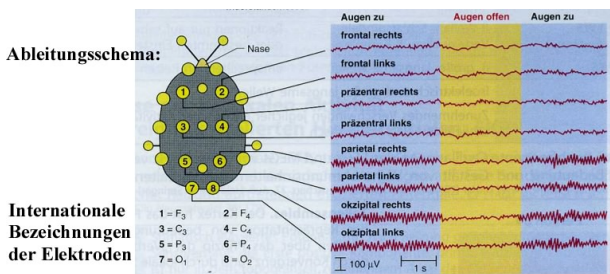


Abbildung 10.15: Ableitungsschema beim EEG und Beispielmessung. [22] (nachbearbeitet)

Zusätzlich zu den sogenannten differentiellen Elektro-

den, die in unmittelbar oberhalb der Hirnrinde angebracht werden, gibt es noch Referenzelektroden an Punkten des Kopfes, dessen Potentialschwankungen weniger von der Hirntätigkeit abhängig sind. Bei einer bipolaren Ableitung wird die Spannung zwischen zwei differentiellen Elektroden gemessen. Schaltet man eine differente Elektrode gegen eine Referenzelektrode, dann spricht man von einer unipolaren Ableitung.

In der oberen Kortexschicht entstehen EEG-Wellen unterschiedlicher Amplitude und Frequenz. Die Frequenzen werden in 4 Frequenzbänder des EEG eingeteilt.

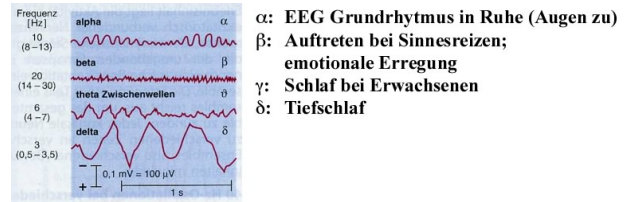


Abbildung 10.16: Die 4 Frequenzbänder des EEG. [22] (nachbearbeitet)

Welche Frequenz dominiert, hängt unter anderem von dem Reifegrad des Gehirns ab. Im Säuglings- und Kleinkindalter dominieren  $\theta$ - und  $\delta$ -Wellen, die mit zunehmendem Alter durch  $\alpha$ - und  $\beta$ -Wellen abgelöst werden. Außerdem hängt die Frequenz vom Aktivitätsniveau des Gehirns ab. Bei einem Erwachsenen treten im inaktiven Wachzustand bei geschlossenen Augen  $\alpha$ -Wellen auf, die beim Augenöffnen in  $\beta$ -Wellen übergehen (siehe Abbildung 10.15). Beim Übergang in den Schlaf treten zunächst  $\theta$ -Wellen, und im Tiefschlaf  $\delta$ -Wellen auf.

Mit dem Hirntod erlischt das EEG irreversibel (Null-Linien-EEG). Meistens geht diesem eine Phase mit sehr langsamen, unregelmäßigen Wellen voraus, die ein Koma anzeigen. Das Null-Linien-EEG dient mit anderen Parametern als Todeskriterium.

### 10.2.3 Evozierte Potentiale

Bisher wurden nur "spontane EEGs" betrachtet, das heißt ohne sensorische Reizung von Außen. Die Potentialänderungen, die an verschiedenen Punkten des

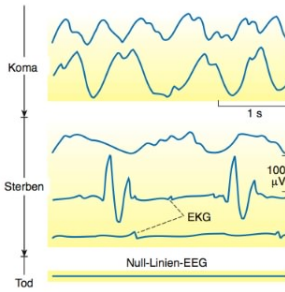


Abbildung 10.17: Erlöschen der EEG-Tätigkeit beim Sterben eines Menschen. [9]

Nervensystems als Folge von Sinnesreizung oder im peripheren Gewebe entstehen, heißen evozierte Potentiale. Die Ableitungen erfolgen an der Wirbelsäule oder der Schädeldecke. Durch eine gezielte Reizung kann unter anderem die Reizleitung von der Peripherie zum Kortex überprüft werden. Außerdem können Zusammenhänge einer nervlichen Blockade einzelner Teile des Zentralnervensystems untersucht werden. Die vom Kortex abgeleiteten sogenannten evozierten Potentiale liefern die sicherste Information über die im Kortex ablaufenden Informationsübertragungsabläufe.

In der Regel besitzen evozierte Potentiale eine wesentlich geringere Amplitude (Größenordnung  $1 \dots 10 \mu V$ ) als die überlagerten EEG-Signale und sie verschwinden in der Regel im Rauschen. Da sie aber mit dem auslösenden Reiz, dessen Zeitverlauf bekannt ist, korreliert sind, kann eine häufige Wiederholung und Mittelung der Signale die evozierten Potentiale sichtbar machen. Die Repetitionszeit der  $\geq 1000$  Wiederholungen beträgt je nach Anwendung zwischen  $10 \text{ ms}$  und  $5 \text{ s}$ .

Bei somatosensorisch evozierten Potentialen (SEP) wird ein peripherer Nerv gereizt um Funktionsprüfungen der afferenten Nerven vorzunehmen. Die Reizung kann mechanisch oder direkt (gepulst) elektrisch erfolgen. Abweichungen der Reizleitungsgeschwindigkeit vom Normwert geben Hinweise auf Krankheitsprozesse. SEPs werden außerdem noch in der Hirnforschung eingesetzt.

Akustisch evozierte Potentiale (AEP) werden durch die Reizung der Basilarmembran im Innenohr durch Schallwellen angeregt. Die Schallwellen sind ent-

weder monochromatisch oder breitbandige Klick-Laute. Durch AEPs kann die akustische Wahrnehmung untersucht werden. Das dient zum einen der Diagnostik, zum anderen aber auch der Bestimmung der Anästhesietiefe, da das akustische Wahrnehmungssystem scheinbar bei zunehmender Schlaf-tiefe am spätesten abgeschaltet wird.

Bei visuell evozierten Potentialen (VEP) werden gepulste Blitzlampen (nur Helligkeitsreiz) oder Schachbrettmuster mit langsamen (1 Hz) oder schnellem (14 Hz) Wechsel der Felderfarben benutzt. Wegen der räumlichen Nähe von Retina und visuellem Kortex ist die Festlegung des Ableitungs-ortes für die Beurteilung besonders wichtig. Mit VEPs werden nicht nur die visuelle Sinneswahrnehmung untersucht; sie werden auch eingesetzt um Multiple Sklerose (MS) zu diagnostizieren. Die ersten Symptome für MS sind Verlängerungen der Latenzen der VEP.

Generell ist bei EP in der Diagnostik die Amplitudenänderungen und die Laufzeitunterschiede der Signale von Bedeutung.

### 10.2.4 Vektorkardiographie

Im Abschnitt 3.4.3 wurde die Herzmuskel-erregung und das Zustandekommen des normalen EKGs erklärt. Die Erregung des Arbeitsmyokards führt zu Potentialschwankungen im Herzen. Diese sind abgeschwächt über die Extrazellulärflüssigkeit an der Körperoberfläche meßbar im Bereich von  $1 \text{ mV}$ . Unerregte Stellen des Myokards sind außen positiv gegenüber erregten. Jede erregte Zelle wirkt als elektrischer Dipol, und die Vektorsumme aller erregten Zellen ergibt den resultierenden elektrischen Dipol, auch Integralvektor oder Herzvektor genannt.

Kombiniert man mehrere Ableitungen von normalen EKGs miteinander, so kann man das EKG vektoriell interpretieren.

Bei der Vektorkardiographie wird das Kreisen der Dipolspitze im Verlauf des Herzzyklus aufgezeichnet.

Die Richtung des größten Integralvektors (R-Zacke im EKG) definiert die elektrische Herzachse. Diese

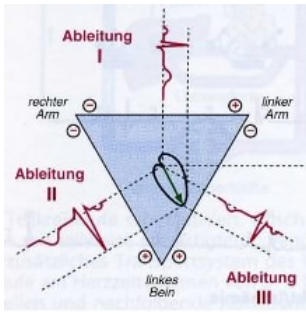


Abbildung 10.18: Zusammenhang zwischen normalem EKG und der Vektorkardiographie. [22]

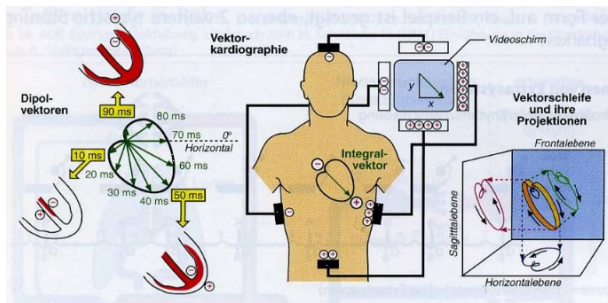


Abbildung 10.19: Prinzip der Vektorkardiographie. [22]

stimmt in der Regel mit der anatomischen Lage des Herzens überein, die so bestimmt werden kann.

## 10.3 Messtechniken

### 10.3.1 Lead fields

Zu der Abbildung bioelektrischer Ströme tragen grundsätzlich alle zur Meßzeit aktiven Stromdipole bei. Es ist nicht möglich, nur eine Projektion aufzunehmen wie es z.B. in der CT gemacht wird. Man muß genauer bestimmen, welche möglichen Stromdipole  $\vec{p}_i$  im Körper in welchem Maße zu dem Signal eines spezifischen Elektrodensignals beitragen. Zu jedem gegebenen Elektrodenpaar gibt es ein *lead field* (lead = Zuführung, Elektrode)  $\vec{a}(\vec{r})$ , so daß das von dem Elektrodenpaar gemessene Signal eines be-

liebigen Stromdipols  $\vec{p}$  durch

$$U = \vec{a}(\vec{r}) \cdot \vec{p}$$

gegeben ist. Solche lead fields wurden für verschiedene Elektrodenanordnungen bestimmt.

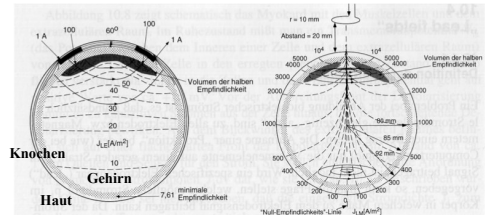


Abbildung 10.20: Lead fields von Elektroden und Magnetometern eines Kopfmodells. [10]

Zur Modellierung der lead fields von Elektroden (und Magnetometern) auf einem Kopf wurden zur Modellierung 3 Kugelschalen benutzt, die unterschiedliche Leitfähigkeiten besitzen: für die Haut, für die Knochen und für das Gehirn. Man erkennt, daß die Empfindlichkeit für Stromdipole in der Nähe der Elektroden am größten ist, und diese schnell mit wachsendem Abstand abfällt.

Es gibt einen Zusammenhang zwischen dem lead field eines Elektrodenpaars und der Stromdichteverteilung im Körper, die sich ergeben würde, wenn man in das gleiche Elektrodenpaar einen Strom einspeißt (Reziprozitätstheorem). Dieses Reziprozitätstheorem ist nützlich um lead fields zu bestimmen oder abzuschätzen.

### 10.3.2 Das inverse Problem

Das "Vorwärts-Problem" ist, aus einer gegebenen Stromdipolverteilung die Potentiale (und Magnetfelder) außerhalb des Körpers zu berechnen. Diese Probleme besitzen immer eine eindeutige Lösung. Das ist bei dem inversen Problem, der Bestimmung der unbekanntenen Stromdipolverteilung aus den gemessenen Potentialen (und Magnetfeldern), nicht der

Fall. Bei der Rekonstruktion bioelektrischer Ströme treten zwei Schwierigkeiten auf: das Problem ist Unterbestimmt (Zahl der Unbekannten ist kleiner als die Zahl der Meßgrößen), und es ist oft "schlecht gestellt". Darunter versteht man, daß kleine Meßfehler bereits zu großen Fehlern bei den rekonstruierten Strömen führen können. Es gibt also unter Umständen sehr viele Lösungen, die zu den Messungen "passen". Ein schlecht gestelltes Problem tritt in diesem Zusammenhang immer dann auf, wenn es Stromdipolverteilungen gibt, die außerhalb des Körpers keine oder nur sehr kleine Potentiale erzeugen (sogenannte "stille Quellen").

### 10.3.3 Auswertung bioelektrischer Daten

Häufig ist die Modellierung von bioelektrischen Strömen im Körper durch einen einzigen Stromdipol möglich. Bei der Rekonstruktion soll der Ort und die Richtung des Dipols gefunden werden. Jetzt ist das Problem überbestimmt, und per Fit werden die "Vorwärts-Rechnungen" an die Meßdaten angepaßt. Diese Art der Auswertung eignet sich auch für dynamische Beobachtungen und kann auch, wenn ein physiologischer Grund für die Erweiterung vorliegt, auf mehrere Stromdipole erweitert werden.

Es ist auch möglich, Ströme nur auf vorher festgelegten Punkten zu messen und dann danach zu fragen, wie groß die Ströme an diesen Punkten waren und in welche Richtung sie gezeigt haben. Der Nachteil ist die Festlegung der Meßpunkte vor der Datenaufnahme, die idealerweise anhand von physiologischen Überlegungen sinnvoll für die Fragestellung festgelegt werden. Der Vorteil ist die leichte Rekonstruktion der Ströme. Alle Meßwerte an einem Elektrodenpaar, die in dem Vektor  $\vec{U}$  zusammengefaßt werden, hängen über die lead field Matrix  $\underline{a}(\vec{r})$  mit dem Stromdipol  $\vec{p}(\vec{r})$  zusammen:

$$\vec{U} = \underline{a}(\vec{r}) \cdot \vec{p}(\vec{r}) .$$

Bei mehreren aktiven Dipolen an den Orten  $\vec{r} - \vec{r}_N$  gilt der Überlagerungssatz, daß die Beiträge aller  $N$  Dipole zu einer gesamten Elektrodenspannung addiert werden können. Damit ergibt sich eine große Matrixgleichung mit der gesamten lead field Matrix

$\underline{A}$ :

$$\vec{U} = \underline{A}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) \cdot \vec{p}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) .$$

Wenn die Matrix  $\underline{A}$  für eine Kombination aus bestimmten Elektrodenpaaren und möglichen Stromdipolen berechnet wurde, dann kann man für jede mögliche Auswahl von Stromdipolen sofort die zu erwartenden Spannungen errechnen. Die Berechnung der Matrix ist nicht einfach, insbesondere bei komplexeren Volumenleitermodellen, aber wegen dieser Universalität (wenn sich die Dipolorte nicht verändern) sehr nützlich. Das schon angesprochene "inverse Problem" ist mathematisch gesehen das Berechnen der inversen lead field Matrix  $\underline{A}^{-1}$ , mit der Hilfe die Stromdipole einfach berechnet werden könnten:

$$\vec{p}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \underline{A}^{-1}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) \cdot \vec{U}$$

### 10.3.4 Detektoren

Die Aufnahme elektrischer Spannungs- oder Stromsignale an der Körperoberfläche erfolgt im Allgemeinen durch auf die Haut aufgesetzte Elektroden. Für spezielle Anwendungen können sie auch in das Körpergewebe eingestochen werden. Der Ohm'sche Kontaktwiderstand sollte selbstverständlich möglichst klein gehalten werden. Daher werden großflächige Elektroden verwendet, wann immer eine räumliche Ortsdifferenzierung der Signale nicht dagegen spricht. Für den Kontaktwiderstand werden Werte von  $\leq 100 \Omega$  im Allgemeinen als ausreichend betrachtet.

Bei der Messung biomagnetischer Signale benötigt man nicht nur einen Detektor mit einem sehr gutem Signal-zu-Rausch-Verhältnis, sondern muß auch die Störsignale abschirmen, die meistens um viele Größenordnungen stärker sind als die Signale (siehe 10.1.7). Die empfindlichste Methode zur Messung von Magnetfeldern ist die Ausnutzung des Josephson-Effektes. Er nutzt den Tunneleffekt durch eine dielektrische Barriere zwischen zwei Supraleitern aus. Als Detektor werden daher in der Magneto-Enzephalographie beziehungsweise -Kardiographie SQUIDS (Superconducting Quantum Interference Device) benutzt. Störsignale werden abgeschirmt durch magnetisch abgeschirmte Kabinen und Filter.

## Supraleiter

Die herausragendsten Eigenschaften eines Supraleiters (SL) sind:

- Verschwindender elektrischer DC-Widerstand
- SL sind perfekte Diamagnete, d. h.  $\chi_m = -1$ . Als Folge davon ist das innere des SL Magnetfeldfrei (Meissner-Ochsenfeld-Effekt).
- Ein SL verhält sich gewöhnlicherweise als ob eine Energielücke  $2\Delta$  um die Fermi-Energie  $E_F$  herum zentriert existieren würde. Ein Elektron der Energie  $E$  kann nur dann aufgenommen (oder entfernt werden), wenn  $(E - E_F)$  (oder  $(E_F - E)$ ) größer ist als  $\Delta$ . Die Größenordnung der Energielücke ist  $\Delta \approx 1 \text{ meV}$ .
- Die supraleitenden Eigenschaften treten unterhalb der sogenannten kritischen Temperatur  $T_c$  auf. Häufig tritt der Isotopen-Effekt auf:  $T_c \sim \sqrt{M}$  Die Tatsache, daß die kritische Temperatur von der Masse  $M$  der Ionen abhängt, ist ein Hinweis darauf, daß die Ionen eine aktive Rolle beim Übergang in den supraleitenden Zustand spielen (Phononen!).
- Der magnetische Fluß  $\Phi$  durch einen ringförmigen SL ist quantisiert:  $\Phi = n \cdot \Phi_0 = n \cdot \frac{hc}{2e}$ .  $\Phi_0 = 2 \cdot 10^{-11} \text{ T cm}^2$  ist das elementare Flußquantum.

Die qualitative Erklärung für die SL 1. Art ist, daß ein durch das Gitter laufendes Elektron das Gitter deformiert, so daß ein ihm gleichzeitig entgegenlaufendes Elektron eine stärkere Anziehung spürt. Diese über ein Phonon vermittelte Kopplung zwischen zwei Elektronen ist energetisch günstig, wenn Spin und Impuls der beiden Elektronen antiparallel ausgerichtet sind. Die beiden Elektronen und die Gitterdeformationen bilden ein Quasiteilchen (Cooper-Paare). Wegen  $S_{ges} = 0$  sind sie Bosonen, und es können daher makroskopische Quantenzustände (z.B. Bose-Einstein-Kondensation) auftreten.

Bei SL 1. Art besteht der perfekte Diamagnetismus und die Supraleitung nur bis zu einem äußeren kritischen Feld  $H_c$ . SL der 2. Art verhalten sich bis zu

einem ersten kritischen Feld  $H_{c1}$  wie die SL 1. Art. Beim kritischen Feld dringen die Feldlinien ebenfalls in das Material ein, aber die Magnetisierung sinkt nicht auf Null. Diese teilweise supraleitende Eigenschaft bleibt bis zu einem zweiten kritischen Feld  $H_{c2}$  erhalten, das um mehrere Größenordnungen über dem Feld  $H_{c1}$  liegen kann. Für Typ 2 SL liegt dieses technisch wichtige zweite kritische Feld im Bereich von bis zu  $50 \text{ T}$ . Typ 2 SL sind größtenteils Legierungen, während Typ 1 SL eher Elemente sind. Darüber hinaus gibt es auch organische Supraleiter (Polymere) sowie keramische Materialien (Hochtemperatursupraleiter), die oberhalb der kritischen Temperatur Isolatoren sind.

## Josephson Effekt

Wenn zwei SL durch eine dünne isolierende (dielektrische) Barriere getrennt sind (Josephson-Kontakt), dann ist es möglich, daß einzelne Elektronen durch diese Barriere hindurchtunneln können. 1962 sagte B. D. Josephson voraus, daß zusätzlich zu dem normalen Tunnelstrom von einzelnen Elektronen ein Tunnelstrom von Elektronenpaaren existiert, wenn die Tunnelbarriere nicht zu dick ist. Solche Elektronenpaare können auch in der Abwesenheit von äußeren elektrischen Feldern auftreten. Da dieser Beitrag durch Cooper-Paare geliefert wird, ist er verlustfrei und damit ohne Spannung über dem Josephson-Kontakt. Dies wird als DC Josephson-Effekt bezeichnet.

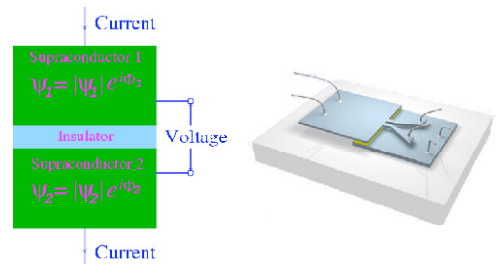


Abbildung 10.21: Josephson-Kontakt.

In der Abbildung 10.21 ist ein Josephson-Kontakt skizziert. Die angeschriebenen Wellenfunktionen  $\Psi_i$  sind die Wellenfunktionen aller Elektronen in dem SL  $i = 1, 2$  (makroskopischer Quantenzustand). Die



Kopplung durch den Isolator wird durch eine Konstante  $K$  beschrieben. Die gekoppelten Schrödinger-Gleichungen der Wellenfunktionen  $\Psi_i$  lauten

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} &= -\frac{i}{\hbar} (U_1 \Psi_1 + K \Psi_2) , \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} &= -\frac{i}{\hbar} (U_2 \Psi_2 + K \Psi_1) . \end{aligned}$$

Wenn auf beiden Seiten der Tunnelbarriere das gleiche Material benutzt wird, dann gilt zusätzlich  $U_1 = U_2$ . Wenn ein elektrisches Feld (DC Potential  $V$ ) über die Tunnelbarriere angelegt wird, dann ist  $U_1 - U_2 = qV$ , und bei der Wahl des Energienullpunkts in der Mitte zwischen  $U_{1,2}$  erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} &= -\frac{i}{\hbar} \left( \frac{qV}{2} \Psi_1 + K \Psi_2 \right) , \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} &= -\frac{i}{\hbar} \left( -\frac{qV}{2} \Psi_2 + K \Psi_1 \right) . \end{aligned}$$

Mit den Ansätzen

$$\Psi_i = \sqrt{n_i} e^{i\Theta_i} ,$$

wobei  $n_i = |\Psi_i|^2$  die Dichte der Elektronen in  $i = 1, 2$  darstellt und  $\Theta_i$  die jeweilige Phase der Wellenfunktion ist, erhält man nach der Trennung in Real- und Imaginärteil

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_1}{\partial t} &= \frac{2K}{\hbar} \sqrt{n_1 n_2} \sin(\Theta_2 - \Theta_1) \\ &= -\frac{\partial n_2}{\partial t} , \quad \text{und} \\ \frac{\partial \Theta_{1,2}}{\partial t} &= \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \cos(\Theta_2 - \Theta_1) \mp \frac{qV}{2\hbar} . \end{aligned}$$

Der Strom durch die Tunnelbarriere ist also

$$I_T = q \frac{\partial n_1}{\partial t} \cdot V_1 = \frac{2Kq}{\hbar} \sqrt{n_1 n_2} \sin \delta \cdot V_1 ,$$

wobei  $V_1$  das Volumen des SL  $i = 1$  ist, und die Definition  $\delta := \Theta_2 - \Theta_1$  eingeführt wurde. Die externe Stromquelle liefert Elektronen nach, es gibt keine Aufladung eines SL. Aus den obigen Lösungen ergibt sich

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{qV}{\hbar} ,$$

und da die Ladungsträger Elektronenpaare sind,  $q = 2e$ , gilt

$$\delta = \frac{2eV}{\hbar} t + \delta_0 .$$

Daher ergibt sich an den Kontakten ein oszillierender Suprastrom (AC Josephson Effekt) mit der Kreisfrequenz

$$\omega_J = \frac{2eV}{\hbar} .$$

Eine Gleichspannung von  $V = 1 \mu V$  erzeugt so eine Frequenz von  $483,6 \text{ MHz}$ . (Umgekehrt kann ein elektrisches Wechselfeld einen Gleichstrom durch den Kontakt verursachen.)

Befindet sich ein Josephson-Kontakt in einem Magnetfeld, so tritt ein Phasenfaktor auf, der durch das Vektorpotential  $\vec{A}$  ( $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$ ) bestimmt ist:

$$\Psi(\vec{r}) \rightarrow \Psi(\vec{r}) \cdot e^{\frac{iq}{\hbar} \int d\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r})} .$$

## SQUID

Befinden sich zwei parallel geschaltete Josephson-Kontakte in einem Magnetfeld (DC-SQUID), dann tritt an den beiden Kontakten ein Gesamtstrom auf, der mit dem Fluß, der den Kreis aus beiden Josephson-Kontakten durchdringt, oszilliert.

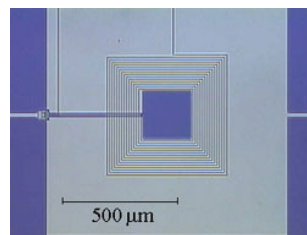


Abbildung 10.22: SQUID.

Die Phasenänderungen längs der beiden Wege ist

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \delta_1 + \frac{2e}{\hbar} \int_{\text{Weg1}} d\vec{r} \cdot \vec{A} , \\ \Delta_2 &= \delta_2 + \frac{2e}{\hbar} \int_{\text{Weg2}} d\vec{r} \cdot \vec{A} . \end{aligned}$$

Diese müssen gleich sein, und der Phasenunterschied ist proportional zu dem magnetischem Fluß  $\Phi$  durch die Schleife:

$$\begin{aligned}
 \delta_2 - \delta_1 &= \frac{2e}{\hbar} \oint_C d\vec{r} \vec{A} \\
 &= \frac{2e}{\hbar} \int \int_{F(C)} d\vec{f} \vec{\nabla} \times \vec{A} \\
 &= \frac{2e}{\hbar} \int \int_{F(C)} d\vec{f} \vec{B} \\
 &= \frac{2e}{\hbar} \Phi .
 \end{aligned}$$

Der gesamte Strom durch beide Josephson-Kontakte ist gegeben durch die Summe der einzelnen Kontakte:

$$\begin{aligned}
 I_{max} &= I_0 \left\{ \sin \left( \delta_1 + \frac{e}{\hbar} \Phi \right) + \sin \left( \delta_1 - \frac{e}{\hbar} \Phi \right) \right\} \\
 &= I_0 \sin \delta_0 \cos \left( \frac{e\Phi}{\hbar} \right) .
 \end{aligned}$$

$\delta_0$  ist die (unbekannte) intrinsische Phasendifferenz über dem einzelnen Josephson-Kontakt und  $\Phi$  ist der magnetische Fluss durch den Ring. Der Tunnelstrom besitzt Maxima, wenn  $e\Phi/\hbar$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $\pi$  ist. Aus der Periode des Tunnelstroms läßt sich also der magnetische Fluß  $\Phi$  und damit auch die Stärke des Magnetfeldes bestimmen.