

4 Biomechanik

Literatur zu diesem Kapitel:

- Biophysik, W. Hoppe, W. Lohmann, H. Markl, H. Ziegler (Hrsg.) Springer
- Der Körper des Menschen, A. Faller, M. Schünke Thieme
- Physik, Gerthsen, Vogel Springer
- Physics in Biology and Medicine, Paul Davidovits, Academic Press.
- Physics of the body, John R. Cameron, James G. Skofronick, and Roderick M. Grant, Medical Physics Publishing.
- Muscles, Reflexes and Locomotion, T.A. McMahon, Princeton Univ. Press.
- Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissue, Y.C. Fung, Springer.

4.1 Einleitung

4.1.1 Biomechanik

Die Biomechanik, als Teilgebiet der Biophysik, befasst sich mit Funktionen und Strukturen des Bewegungsapparats und mit Bewegungen von biologischen Systemen. Methodik und Messgrößen werden von der klassischen Mechanik übernommen und auf biologische Organismen und Objekte angewendet. Fragestellungen stammen aus der Ergonomie (z.B. Arbeitsplatzgestaltung, Werkzeuge, Arbeitsabläufe), der Medizin (Anatomie, Neurophysiologie, Orthopädie), aber auch aus der Biologie (z.B. tierische oder pflanzliche Bewegung und Strukturen). Neben der Biologie und Medizin spielt die Biomechanik eine wichtige Rolle im Leistungssport, teilweise auch im Theater.

Wie in der klassischen Mechanik kann man zwischen Statik, Dynamik und Kinematik unterscheiden. Das vorliegende Kapitel behandelt vor allem die

Statik und die Muskelmechanik und -energetik, elastische und plastische Verformungen im Zusammenhang mit Knochen und Wirbelsäule. Andere Themen der Biomechanik, die hier nicht abgedeckt werden können, sind Fortbewegung auf dem Lande (inklusive Stehen), Fortbewegung im Wasser (Hydrodynamik, Schwimmen, Geißelbewegung) und Fortbewegung in der Luft (Aerodynamik, Fliegen). Die Biomechanik des Blutkreislaufes wird im folgenden Kapitel 5 ausführlicher behandelt.

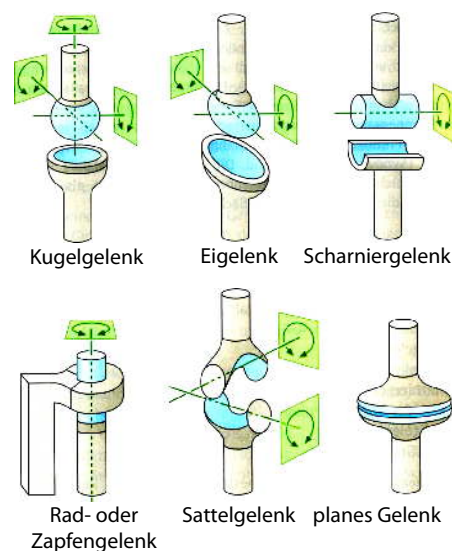


Abbildung 4.1: Gelenkarten des menschlichen Körpers. [12]

Als Beispiel für die mechanischen Grenzen des menschlichen Körpers können die verschiedenen Gelenkarten dienen, mit denen unterschiedliche Stabilität und Bewegungsfreiheit verbunden sind. Im Laufe der Evolution wurden diese für unterschiedliche Gelenke und Randbedingungen entwickelt und optimiert. Kriterien sind hierbei z.B. Stabilität und Beweglichkeit.

4.1.2 Dimensionsbetrachtungen

Statische Belastungen wurden evolutionsgeschichtlich ein Problem als die Lebewesen vom Wasser ans Land wechselten. Sie mussten jetzt "lernen", sich aufrecht zu halten und ihr Körpergewicht (und allenfalls das ihrer Beute) zu tragen. Diese Notwendigkeit ist stark größenabhängig. So ist es z.B. für Gräser wesentlich leichter, ihr eigenes Gewicht zu tragen, als für hohe Bäume: Das Gewicht nimmt mit der dritten Potenz der linearen Dimension zu, die Stärke des Stammes mit seinem Durchmesser, also mit dem Quadrat der linearen Dimension.

Damit eine Pflanze (oder ein Tier) sein eigenes Gewicht tragen kann, muss die Querschnittsfläche proportional zum darüber liegenden Gewicht zunehmen, also $F \propto m \propto h^3$. Beim letzten Schritt wurde angenommen, dass die Masse proportional zur dritten Potenz der Höhe zunimmt. Der Durchmesser d sollte somit wie $d \propto h^{3/2}$ zunehmen. Für das Verhältnis h/d aus Höhe und Durchmesser, welches auch als "Schlankheitsgrad" bezeichnet wird, findet man folgende experimentelle Richtwerte

Pflanze	Höhe / m	h/d
Roggen	1.5	500
Bambus	25-40	133
Palmen	30-40	60
Tanne	70	42
Eukalyptus	100	28
Sequoien	100	15

Wenn man diese mit der einfachen Erwartung $h/d \propto h^{-1/2}$ vergleichen, findet man eine qualitativ passable Übereinstimmung.

Die Abnahme ist allerdings stärker als nach dem einfachsten Modell zu erwarten. Dies deutet darauf hin, dass noch andere Effekte eine Rolle spielen als das Tragen des Gewichts. Wichtige Aspekte bei Pflanzen sind z.B. die Notwendigkeit, alle Teile der Pflanze mit Wasser zu versorgen oder der Widerstand gegen Wind.

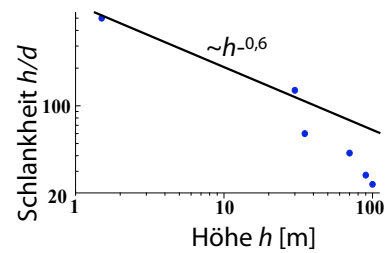


Abbildung 4.2: Das Verhältnis von Höhe zu Durchmesser als Funktion der Höhe für unterschiedliche Pflanzen.

4.1.3 Das motorische System des Menschen

Die Themen, die in diesem Kapitel diskutiert werden, befassen sich in erster Linie mit dem motorischen System (=Bewegungsapparat) des Menschen. Dieses dient uns zum Aufrechterhalten gegenüber der Schwerkraft und zur Bewegung. Es umfasst die Knochen, die Muskulatur, sowie das Nervensystem. Weitere Hilfselemente sind Sehnen, Knorpel, Gelenke und Schütz- und Schmierelemente wie Schleimbeutel.

Dieses Kapitel konzentriert sich auf Knochen und Muskulatur. Die Signalübertragung in den Nerven wird im Kapitel 7 diskutiert.

4.2 Grundbegriffe der Elastizitätslehre

4.2.1 Deformationen

Elemente eines makroskopischen Körpers sind gegeneinander verschiebbar. **Deformationen** erfordern eine Kraft, die von der Art der Deformation sowie der Art des Körpers abhängt. Es wird zwischen zwei Typen von Deformationen unterschieden. Bei der Ersten ändert sich die Form, bei der Zweiten zusätzlich das Volumen:

- Nur Formänderung: **Scherung, Biegung, Drillung**
- Auch Volumenänderung: **Kompression, Dilation**

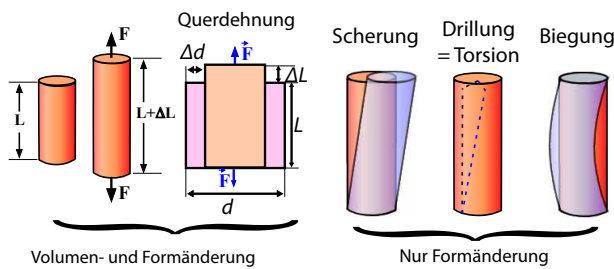


Abbildung 4.3: Unterschiedliche Arten der Verformung.

Festkörper sind form- und volumenelastisch, sie wehren sich gegen alle Arten von Deformationen und kehren in ihre ursprüngliche Gestalt zurück, wenn die Beanspruchung aufgehört hat. Erst wenn die Beanspruchung eine gewisse Grenze überschreitet, dann beginnt das sogenannte plastische Fließen, das bei einer weiteren Steigerung der Beanspruchung zum Bruch führt. Als Zugfestigkeit bezeichnet man die höchstmögliche angelegte Zugspannung bevor das Material bricht.

4.2.2 Spannung

Eine Spannung ist der Quotient aus der wirkenden Kraft $\Delta \vec{F}$ und dem Flächenelement ΔA , an dem diese Kraft angreift:

$$\vec{s} = \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}.$$

Man beschreibt die wirkenden Spannungen durch Zerlegung des Körpers in kleine Volumenelemente, auf die diese Kräfte wirken. Unter den Spannungen erleiden die Volumenelemente Formänderungen.

Eine allgemeine Spannung \vec{s} kann unterteilt werden in die Normalspannung σ , bei der die Spannung senkrecht zum Flächenelement angreift, und in die Schubspannung τ , welche parallel zur Fläche wirkt.

An einem Punkt des Körpers kann man die Fläche, an der die Kräfte angreifen, in drei orthogonale Richtungen orientieren. Bezüglich dieser Fläche kann man die Kraft in eine Normal- und zwei Schubspannungsanteile aufteilen. Insgesamt erhält man somit 9 unterschiedliche Spannungen, welche einen symme-

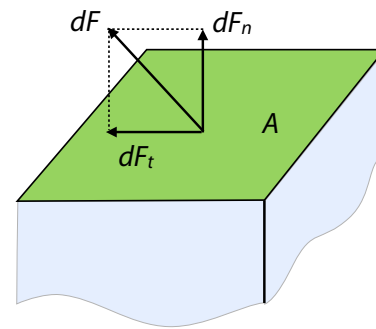


Abbildung 4.4: Zerlegung einer Spannung in Normal- und Schubspannung.

trischen Tensor 2. Stufe bilden, den Spannungstensor

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Auf Grund der Symmetrie sind maximal 6 dieser Größen unabhängig von einander. In der Diagonalen stehen die Normalspannungen und in den Außerdiagonalelementen die Schubspannungen. Da die Spannung als Funktion des Ortes variiert, wird sie in einem ausgedehnten Körper als Tensorfeld $\mathbf{S}(\vec{r})$ beschrieben.

Jede Belastung kann in **elementare Belastungen** zerlegt werden. Bei Zug- und Druckspannungen oder bei Biegungen treten reine Normalspannungen auf. Bei Scherung und Torsion treten reine Schubspannungen auf.

4.2.3 Dehnung

Eine elastische Verformung wird beschrieben durch die Veränderung der Geometrie eines Körpers unter den wirkenden Kräften. Im einfachen Fall eines Würfels (als Volumenelement) kann zum Beispiel eine **Längenänderung** $\Delta \ell$ stattfinden, wobei die rechten Winkel erhalten bleiben. Als **Dehnung** bezeichnet man die relative Längenänderung $\epsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell}$. **Stauchungen** sind negative Dehnungen.

Spannung und Dehnung sind voneinander abhängig. In den weitaus meisten Körpern existiert zudem für

niedrige Spannungen ein Bereich, in dem eine lineare Beziehung gilt, welche für Federn als Hooke'sches Gesetz bekannt ist:

$$\sigma = E\varepsilon \quad [E] = \text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2},$$

wobei die Proportionalitätskonstante E als Elastizitätsmodul (=Young'scher Modul) bezeichnet wird. Bei Stahl beträgt er etwa 200 GPa, und bei Gummi (und auch in etwa bei Muskeln) weniger als 0.1 GPa. Knochen mit $E = 15$ GPa haben in etwa die elastischen Eigenschaften von Holz (13 GPa). Tabelle 4.1 vergleicht die numerischen Werte von Elastizitäts- und Schubmodul für einige Materialien; für Aluminium und Stahl enthält sie außerdem die Bruchspannung als Vergleichsgröße.

Material	E GPa	μ	G GPa	σ_B MPa
Al	70.6	0.34	26.5	147
Stahl	206	0.28	80.4	981
Diamant	1100			
Knochen	17		9	150
Holz	13			
Gummi	0.1- 0.01	0.5		
Bandscheibe	0.005			

Tabelle 4.1: Elastische Konstanten unterschiedlicher Materialien.

Diese Größen gelten nur für den linearen Bereich. Dieser endet spätestens dann, wenn die Verformung plastisch wird. Es gibt aber auch im reversiblen Bereich Abweichungen vom Hooke'schen Gesetz, also nichtlineare Beziehungen zwischen Spannung und Dehnung.

Da das Hooke'sche Gesetz bei biologischen Materialien wie z.B. Gummi nur in einem kleinen Bereich gilt, ist eine sinnvolle Definition der differentielle Elastizitätsmodul

$$\frac{1}{E_{diff}} = \frac{d\varepsilon}{d\sigma}.$$

Dieser muss somit als Funktion des Spannungszustandes bekannt sein.

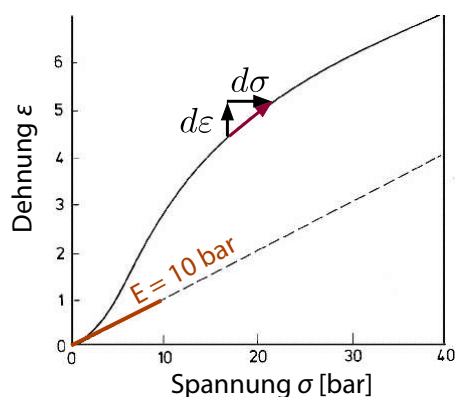


Abbildung 4.5: Dehnung von vulkanisiertem Gummi bei Zug.

4.2.4 Volumenänderung

Wird ein Körper gedehnt, indem eine Normalspannung angelegt wird, so findet man im Allgemeinen nicht nur eine Änderung der Länge in Richtung der Normalspannung, sondern ebenso eine Änderung der Ausdehnung senkrecht zu dieser Richtung. In den meisten Fällen handelt es sich um eine Kontraktion; man spricht von **Querkontraktion**. Wie für die Dehnung findet man einen linearen Bereich, in dem die transversale Längenänderung proportional ist zur Spannung und damit zur Längenänderung in Zugrichtung.

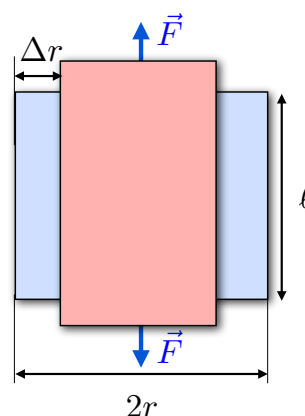


Abbildung 4.6: Querkontraktion eines Zylinders.

Wir betrachten als Beispiel einen Zylinder, der in Achsenrichtung gedehnt wird. Die Verringerung Δr

seines Radius r schreiben wir als relative Änderung

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta r}{r} = -\mu \frac{\Delta \ell}{\ell}.$$

Das Verhältnis der Querkontraktion zur Dehnung heißt *Poisson-Zahl* μ .

Aus der Dehnung und der Querkontraktion berechnen wir die Volumenänderung: Das Volumen des entspannten Zylinders beträgt

$$V = \pi r^2 \ell.$$

Durch die Spannung ändert sich die Länge um $\Delta \ell$ und der Radius um Δr , das Volumen also um

$$\Delta V = 2\pi r \Delta r \ell + \pi r^2 \Delta \ell = V \left(\frac{2\Delta r}{r} + \frac{\Delta \ell}{\ell} \right).$$

Mit Hilfe des oben eingeführten Parameters μ kann dies geschrieben werden als $\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon(1 - 2\mu)$. Für Gummi ist $\mu = 0.5$. Somit verschwindet hier die Volumenänderung.

4.2.5 Scherung

Eine Scher- oder Schubspannung τ bewirkt, dass alle zur Fläche senkrechten Kanten eines Quaders um einen Winkel $\alpha = \Delta x / \ell$ gekippt werden. Man bezeichnet dies als Scherung.

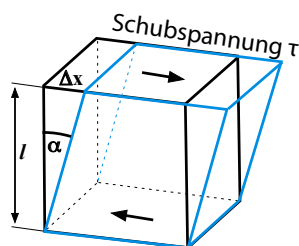


Abbildung 4.7: Scherung eines Würfels.

Der Scherwinkel α ist im linearen Bereich proportional zur Schubspannung:

$$\alpha = \frac{\tau}{G}; \quad \tau = G\alpha.$$

Der Proportionalitätsfaktor G ist der **Torsions- oder Schubmodul**. Da die Schubspannung die gleiche Einheit besitzt wie die Zugspannung ($\tau = F/A$;

$[\tau] = \text{N/m}^2 = \text{Pa}$), besitzt auch der Schubmodul die Einheit Pascal. Materie ist allgemein leichter durch Scherung als durch Dehnung verformbar, d.h. $G < E$ (siehe Tabelle 4.1). Dies kann man sich dadurch plausibel machen, dass auf atomarer Ebene bei Dehnung oder Kompression die Abstände der Atome ändern, bei Scherung aber in erster Näherung nur die Bindungswinkel, nicht die Abstände.

Ähnlich wie der Schubmodul kleiner ist als der Spannungsmodul, ist auch die Bruchspannung für Scherung kleiner als für Stauchung. Knochenbrüche finden deshalb häufig unter kleinen Winkeln statt.

4.2.6 Reihen- und Parallelschaltung

In biologischen Systemen findet man meist keine homogenen Materialien, sondern Kombinationen von mehreren Materialien mit unterschiedlichen Eigenschaften. Ein typisches Beispiel ist die Wirbelsäule, bestehend aus harten Knochen (Wirbel) und weichem Bindegewebe (Bandscheiben). Die mechanischen Eigenschaften dieser Verbundsysteme können teilweise auf ihre Komponenten zurückgeführt werden. Als einfache Beispiele betrachten wir eine Kombination von zwei unterschiedlichen Elementen.

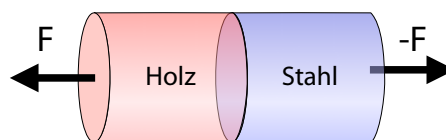


Abbildung 4.8: Reihenschaltung von zwei elastischen Elementen.

Bei einer Reihenschaltung sind beide elastischen Elemente hintereinander verbunden - auf beide wirkt die gleiche Spannung. Wir betrachten nur den elastisch reversiblen Teil. Im Gleichgewicht muss die Kraft, und damit die Spannung, auf beide Elemente gleich sein, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Die Längenänderung $\Delta \ell = \Delta \ell_1 + \Delta \ell_2$ entspricht der Summe der beiden Längenänderungen. Sie beträgt

$$\Delta \ell = l_1 \frac{\sigma}{E_1} + l_2 \frac{\sigma}{E_2}.$$

Für den Fall $\ell_1 = \ell_2 = \ell/2$ ergibt das

$$\Delta\ell = \ell \frac{\sigma}{E_{ges}} = \frac{\ell\sigma}{2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)$$

Damit erhält man den effektiven Gesamtmodul aus der Addition der reziproken Einzelemente:

$$\frac{1}{E_{ges}} = \frac{\varepsilon_{ges}}{\sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right).$$

Hier dominiert offenbar die Komponente mit dem kleineren Elastizitätsmodul, also das weichere Teil.

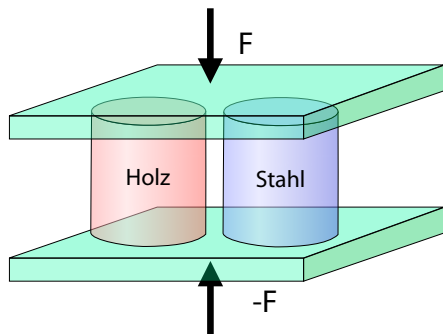


Abbildung 4.9: Parallelschaltung von zwei elastischen Elementen.

Bei Parallelschaltung ist es umgekehrt: Hier werden beide Elemente um den gleichen Betrag komprimiert oder gedehnt. Damit wird $\Delta\ell_1 = \Delta\ell_2 = \Delta\ell$ und $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$. Die aufzuwendende Kraft wird auf beide Elemente verteilt. Die gesamte Kraft F ist somit

$$F = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2.$$

Für gleiche Flächen, $A_1 = A_2 = A$, ist die Kraft somit

$$F = A(\sigma_1 + \sigma_2) = A \frac{\Delta\ell}{\ell} (E_1 + E_2).$$

Die Gesamtspannung beträgt

$$\sigma_{ges} = \frac{F}{2A} = \frac{\Delta\ell}{\ell} \frac{E_1 + E_2}{2}.$$

Daher müssen in diesem Fall die Module addiert werden:

$$E_{ges} = \frac{\sigma_{ges}}{\varepsilon} = \frac{E_1 + E_2}{2}.$$

Hier dominiert der größere Elastizitätsmodul, also das härtere Element.

4.2.7 Elastische und plastische Verformung

Das Verhalten von Materialien unter Zugbelastung kann mittels einer Prüfmaschine ermittelt werden und in einem **Spannungs-Dehnungs-Diagramm** aufgetragen werden (siehe Abb.4.10):

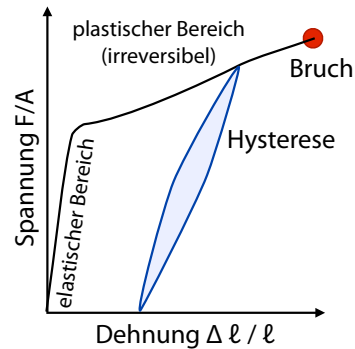


Abbildung 4.10: Spannungs-Dehnungs-Diagramm.

Man kann folgende Bereiche unterscheiden:

- **Elastischer Bereich:** Die Dehnung gehorcht dem **Hookeschen Gesetz**. In diesem Bereich ist die Verformung verschwunden, wenn keine Spannung mehr wirkt.
- **Plastischer Bereich:** Verformungen bleiben teilweise auch ohne Spannung erhalten. Die Form wird abhängig von der Vorgeschichte.
- Wird die Spannung zu groß, so erreicht man den **Bruchpunkt**: Bei dieser Dehnung bricht oder zerreißt der Körper.

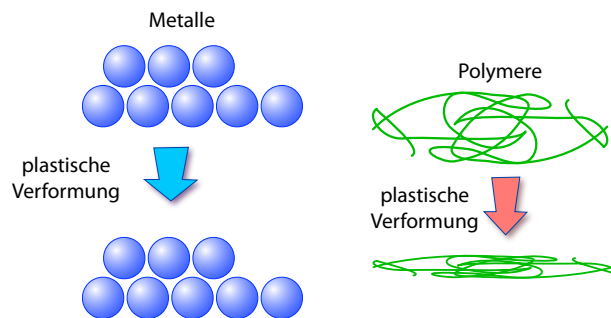


Abbildung 4.11: Mikroskopische Prozesse einer plastischen Verformung.

Auf mikroskopischer Ebene erzeugt man im plastischen Bereich Defekte und / oder verschiebt die De-

fekte innerhalb des Gitters. Beim Bruchpunkt vergrößert sich ein solcher Defekt schlagartig bis auf die Dimensionen des gesamten Körpers.

Im Bereich der plastischen Verformung wird nicht die gesamte in das System hineingesteckte Arbeit wieder frei, sondern sie bleibt als Verformungsenergie und Wärme im System. Die plastische Verlustenergie kann berechnet werden, indem man für jedes Volumenelement dV das Schleifenintegral über einen Zyklus der angelegten Spannung bildet. Die geleistete mechanische Arbeit ist dann

$$dW = \oint dF ds = dV \oint d\varepsilon \sigma.$$

Hier ist dF die am Volumenelement angreifende Kraft und ds der gegen die Kraft zurückgelegte Weg. Außerdem haben wir verwendet dass

$$dF = \sigma dA,$$

mit der Spannung σ und

$$ds = d\varepsilon \ell.$$

Ist der Körper homogen, d.h. ε und σ über das Volumen konstant, so reduziert sich das Volumenintegral auf eine Multiplikation mit $V = \int \ell dA$. Damit wird die Verlustenergie

$$W = V \oint d\varepsilon \sigma.$$

Im Spannungs-Dehnungs-Diagramm entspricht dies der Fläche, die von der Hystereseurve eingeschlossen wird.

Diese unterschiedlichen Bereiche findet man bei biologischen Materialien genau so wie bei kristallinen Festkörpern. Allerdings sind biologische Materialien meistens wesentlich komplexer und häufig nicht homogen, sondern auf unterschiedlichen Ebenen strukturiert und an unterschiedlichen Orten unterschiedlich stark. Ein wichtiger Aspekt bei der Optimierung ist die Verschiebung des Bruchpunktes zu möglichst hohen Werten von Spannung und Dehnung. Dazu muss vor allem vermieden werden, dass mikroskopische Defekte (Risse) sich zu schnell ausbreiten.

4.3 Knochen

4.3.1 Aufbau

Knochen sind die wesentliche Voraussetzung dafür, dass höhere Organismen eine definierte Form aufweisen. Zusammen mit Muskeln und Sehnen ermöglichen sie die Fortbewegung sowie andere motorische Tätigkeiten. Außerdem haben sie eine schützende Funktion (z.B. Schädel für das Gehirn).

Das menschliche Skelett besteht aus rund 206 Knochen, Man unterscheidet

- Lange Knochen : Röhrenknochen (Extremitäten)
- Kurze Knochen : Hand- und Fußwurzelknochen
- Unregelmäßige Knochen : Wirbel
- Flache Knochen : Schädelknochen, Schulterblatt, Rippen, Brustbein

Knochen sind stark strukturiert um ihre vielfältigen Aufgaben optimal erfüllen zu können. Eine Übersicht über den Aufbau von Knochen ist in der Abbildung 4.12 zu sehen.

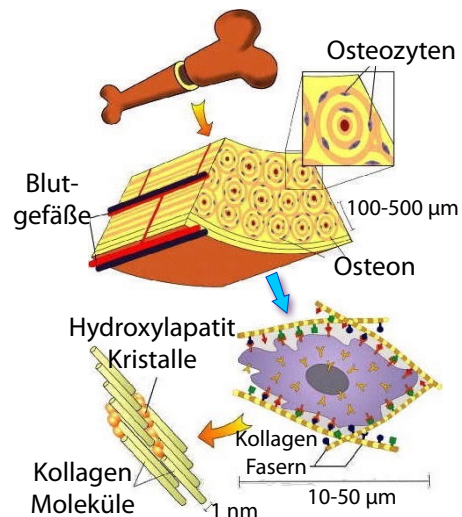


Abbildung 4.12: Aufbau von Knochen.

In einem typischen Röhrenknochen findet man ein System von röhrenartigen Strukturen, welche als

Osteons bezeichnet werden. Diese bestehen aus einem Komposit-Material von kristallinem anorganischem Material und Proteinen, sowie aus lebenden Zellen. Das Ganze wird durch Blutgefäße mit Baustoffen und Sauerstoff versorgt.

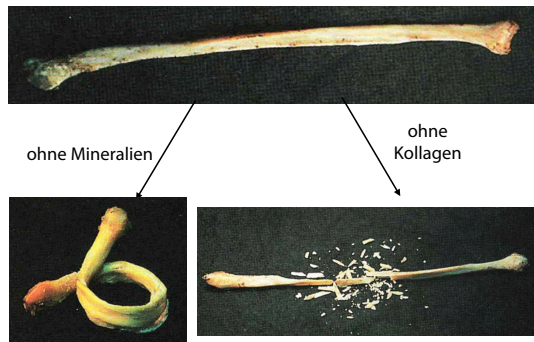


Abbildung 4.13: Knochen als Komposit-Material.

Knochen müssen unterschiedliche Kräfte auffangen können, welche sowohl als Dehnung, Stauchung, Biegung, Torsion oder Scherung wirken können und müssen dementsprechend auf alle diese Belastungen angepasst sein. Die Kräfte können zudem kontinuierlich oder als Schläge wirken.

Knochen sind stark mineralisiert. Trotzdem ist der Bruchwiderstand 2 oder 3 Größenordnungen höher als der eines Kristalls, der aus dem reinen Mineral besteht.

Knochen enthalten lebende Zellen und bleiben dadurch anpassungsfähig. Belastungen führen zu entsprechenden Verstärkungsmechanismen: Werden Knochenzellen bei Belastungen um mehr als 0.15% gedehnt, so löst dies verstärkte Knochenbildung aus. Dies geschieht indem zusätzliches Calcium eingebaut wird. Umgekehrt können Knochen auch abgebaut werden: Bleibt die Dehnung dauerhaft unterhalb von 0.05%, so wird dies als Signal verstanden, dass der Knochen unnötig stabil ist und er wird abgebaut. Diese Anpassungen werden hormonell, sowie durch direkte Kommunikation zwischen den Knochenzellen kontrolliert.

Die Fähigkeit, Kräfte aufnehmen und umleiten zu können, darf nicht mit einem zu hohen Gewicht bezahlt werden. Der Aufbau der Knochen ist deshalb vergleichbar mit Leichtbaukonstruktionen. Die äußeren Teile sind relativ dicht, im Inneren sind die

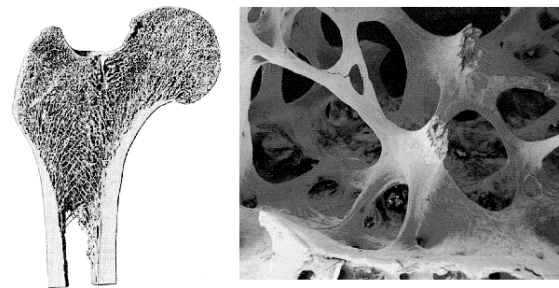


Abbildung 4.14: Knochen als Leichtbaustruktur

Knochen meist mit mehr oder weniger großen Hohlräumen durchsetzt. Die Stützen und Stege sind so orientiert, dass sie die Lasten optimal ableiten. Diese Strukturierung erstreckt sich über eine weite Längenskala, vom *nm* bis in den *mm*-Bereich.

Technisch gesehen handelt es sich um eine "Nano-Komposit Struktur". Die Materialforschung versucht, vergleichbare Strukturen herzustellen. Allerdings wird es auf absehbare Zeit nicht möglich sein, dies bei einer Temperatur von 37° C in wässriger Lösung zu tun.

4.3.2 Extrazelluläre Matrix

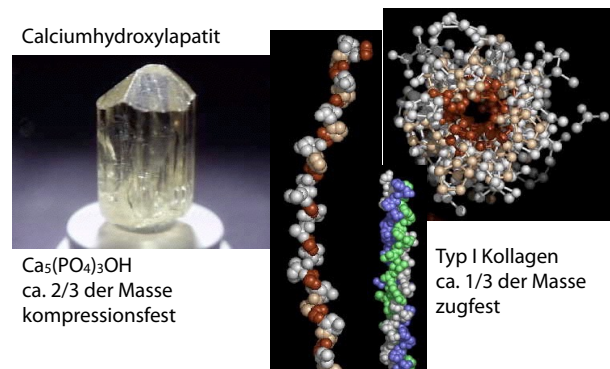


Abbildung 4.15: Bestandteile der extrazellulären Matrix.

Der größte Teil des Knochens besteht aus einer extrazellulären Matrix. Diese besteht zu ca. 2/3 aus Calciumhydroxylapatit ($\text{Ca}_5(\text{PO}_4)_3\text{OH}$). Dieses kristalline Material verleiht dem Knochen die Kompressionsfestigkeit. Der Rest der extrazellulären Matrix besteht zu 90% aus Typ I Kollagen. Dieses Pro-

tein ist vor allem für die Zugfestigkeit der Knochen verantwortlich, und für die Fähigkeit, die Energie von Schlägen aufzunehmen ohne dass sich dadurch größere Risse bilden.

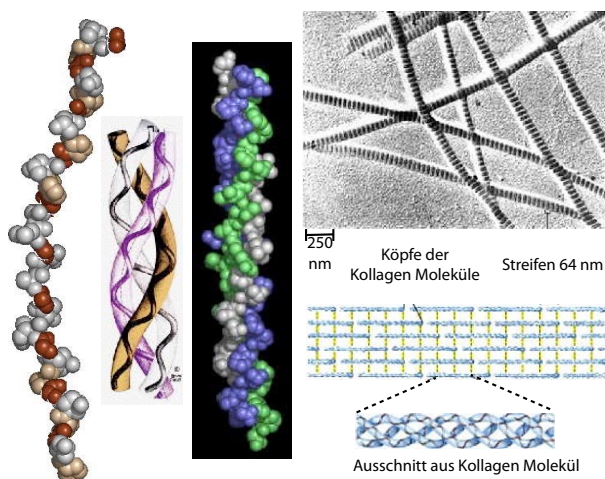


Abbildung 4.16: Struktur von Kollagen.

Die Kollagen-Moleküle sind langkettige Polypeptide, die sich in 3er Gruppen zu einer Helix verbinden und in regelmäßigen Abständen miteinander verbunden sind.

Neuere Arbeiten zeigen, dass sich der organische Teil (=Kollagen) und der anorganische Teil (=Calciumapatit) gegenseitig beeinflussen: Sowohl die Morphologie der Apatitkristalle wie auch die Struktur der Proteine ist im Verband anders als in den reinen Komponenten. Insbesondere legen auch die Proteine die Kristallisationsrichtung der Apatitkristalle fest, so dass deren optimale Belastungsrichtung kontrolliert werden kann.

Als Modellobjekt für die Untersuchung derartiger Kompositmaterialien eignen sich unter anderem Muschelschalen sehr gut. Hier besteht der anorganische Teil aus Calciumcarbonat (CaCO_3). Da reines Calciumcarbonat (wie auch Calciumhydroxylapatit) sehr brüchig sind, hat die Natur den Trick des schichtweisen Wachstums (Epitaxie) erfunden, um die Bildung einer plättchenförmigen Modifikationen des CaCO_3 (Aragonit) zu erzwingen. Dabei dienen Filme aus dem Polysaccharid Chitin und negativ geladenen Proteinen als zweidimensionale Matrix. An dieser Oberfläche wächst das CaCO_3 in der Form von plättchen-

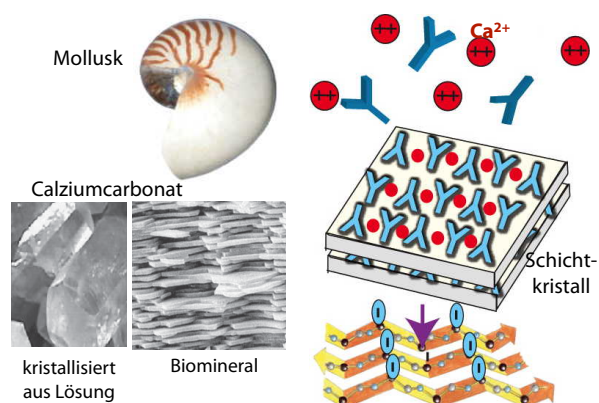


Abbildung 4.17: Knochen und Mollusken als Beispiele für Komposit-Materialien.

förmigen Kristallen. Es entsteht so ein schichtartig aufgebautes Keramik-Verbundmaterial mit außergewöhnlichen elastischen Eigenschaften. Obwohl es nur wenige Prozent an bio-organischem Material enthält, ist es einige 1000-mal resistenter gegen Bruch als technische Keramiken. Die Ausbreitung von mikroskopisch kleinen Rissen wird durch den organischen Bestandteil behindert. Es gibt derzeit viele Bemühungen, die Prozesse der Biomineralisierung technisch nachzuahmen.

4.3.3 Knochenzellen und Blutgefäße

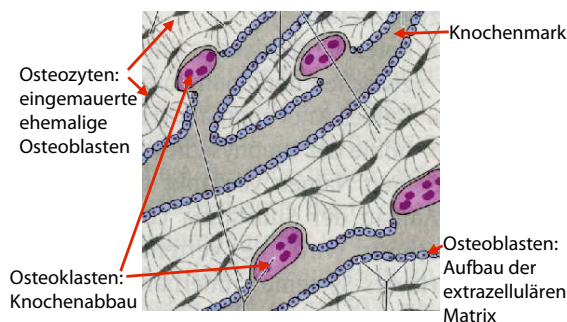


Abbildung 4.18: Typen von Knochenzellen.

Die extrazelluläre Matrix wird von verschiedenen Zellen gebildet, kontrolliert und bei Bedarf abgebaut. Der Knochen wird größtenteils von einer Knochenhaut aus lebenden Zellen umgeben, aber auch im Innern des Knochens befinden sich lebende Zel-

len. Die verschiedenen Zelltypen werden als Osteoblasten, Osteozyten und Osteoklasten bezeichnet.

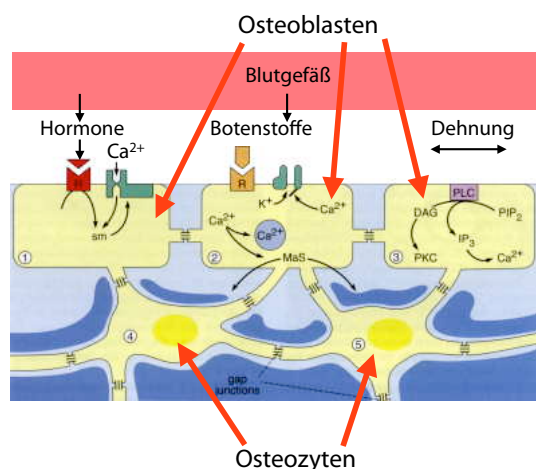


Abbildung 4.19: Stoffaustausch über die Knochenzellen.

Die Osteoblasten sind für den Aufbau der extrazellulären Matrix verantwortlich; die Osteoklasten bauen sie bei Bedarf wieder ab. Der Austausch von Stoffen, der Auf- und Abbau der Knochen wird teilweise durch Hormone gesteuert, teilweise durch Sensoren, welche auf mechanische Kräfte reagieren.

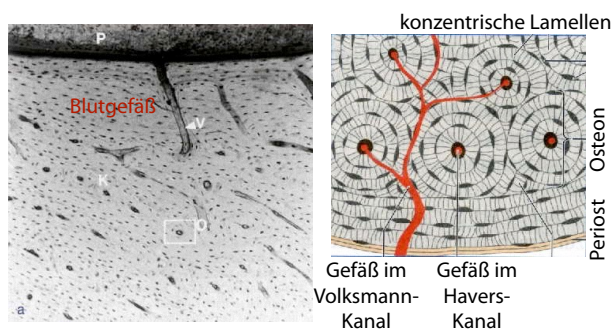


Abbildung 4.20: Blutgefäße im Knochen.

Die Knochenzellen werden durch ein System von Blutgefäßen versorgt. Man unterscheidet zwischen den Volksmannkanälen, welche senkrecht zum Knochen verlaufen, und den Havers-Kanälen, welche im Inneren eines Osteons parallel zum Knochen verlaufen. Die Knochendurchblutung liegt für einen typischen Röhrenknochen bei ca. 40 – 120 ml/(kg·min). Bei einem 7 kg Skelett ergibt das mehrere 100 ml

pro Minute.

4.3.4 Mechanische Eigenschaften

Knochen sind darauf optimiert, bei geringem Gewicht Kräfte aufzunehmen und umzuleiten. Damit eine Kraft optimal aufgenommen werden kann, sollte der Knochen möglichst starr sein. Andererseits bedingt die Widerstandsfähigkeit gegen Stöße eine gewisse Elastizität, damit die Energie aufgenommen werden kann und nicht zu Brüchen führt. Tabelle 4.2 fasst die Elastizitätsmodule einiger Materialien zusammen. Die Anisotropie der elastischen Konstanten zeigt, dass sie auf die vorherrschende Belastung optimiert ist. Dies wird durch die anisotrope Struktur erreicht. Die Lamellenstruktur auf der Skala von einigen μm verhindert, dass Risse sich über diese Distanz hinaus ausbreiten (sofern die Belastung nicht zu hoch ist) und damit einen Bruch des Knochens.

Knochen und ähnliche vergleichbare Materialien sind hochgradig optimiert. Künstliche Materialien, welche ähnliche Eigenschaften erreichen, können nur mit aufwändigen Spezialverfahren hergestellt werden. Demgegenüber werden Knochen bei Temperaturen von 37° in wässriger Lösung hergestellt, mit sehr unterschiedlichen Formen. Diese Eigenschaften gelten allgemein für harte biologische Materialien und werden insbesondere an Muschelschalen untersucht. Man versucht, deren Eigenschaften auch in künstlichen Komposit-Materialien zu nutzen (siehe, z.B. [30]).

4.3.5 Kräfte im Beckenbereich

Die Morphologie (=Form) der Knochen ist dahingehend optimiert, dass die darauf wirkenden Kräfte optimal umgeleitet werden. Ein Beispiel für die Kräftezerlegung durch die Knochenform und Muskelfixierung ist in den folgenden Abbildungen für den Beckenbereich zu sehen.

Das Gewicht G_0 des Menschen wird im Becken auf die beiden Beine (im Schnitt) gleichmäßig aufgeteilt.

Material	Elastizitätsmodul E / GPa	Bruchfestigkeit $\sigma_B / 10 \text{ MPa}$	Bruchdehnung %
Al (rein, weich)	72	1.3	50
α -Eisen	218	10	50
CrV-Federstahl	212	155	5
Beton	40	5	
Hölzer \parallel (\perp)Maserung	15 (1.5)	5-20 (0.3-1)	
Knochen kompakt (spongiös)	18 (0.08)	12 (0.22)	
Knochen \parallel (\perp)	16	8.5 (1)	0.6 (0.2)
Sehnen (Bandscheiben)	0.7	6.5 (1.1)	
Menschenhaar	3.6		

Tabelle 4.2: Elastizitätsmodule und Bruchfestigkeit verschiedener Materialien.

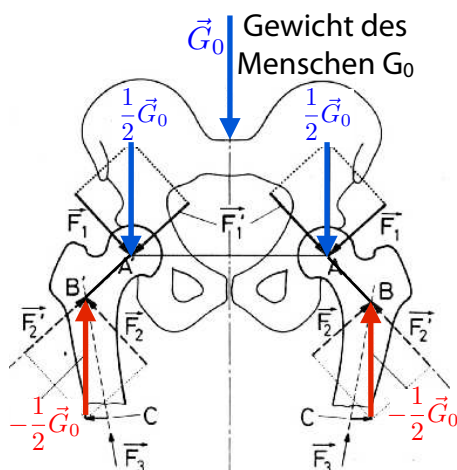


Abbildung 4.21: Kräfte im Beckenbereich.

Auf jedes Hüftgelenk muss somit eine Stützkraft von $-\frac{1}{2}G_0$ wirken.

In Gedanken zerlegen wir diese Kraft im Bereich des Hüftgelenkes wieder in 2 Komponenten: F_1 wirkt senkrecht, F_1' parallel zur Verbindungsrichtung AB. Damit das System im Gleichgewicht bleibt, müssen im Punkt B wiederum zwei Kräfte, F_2 und F_2' wirken, welche entgegengesetzt gleich zu F_1 und F_1' sind.

Die beiden Kräfte F_1' und F_2' erzeugen Druck, aber keine Beschleunigung und kein Drehmoment. F_1 und F_2 stellen dagegen ein Kräftepaar dar: sie erzeugen ein Drehmoment

gen ein Drehmoment

$$T = 2|\vec{F}_1|\ell \sin\alpha, \quad (4.1)$$

welches durch die Muskeln und Sehnen kompensiert werden muss. Durch die beiden Kräftepaare erzeugen im Knochen sowohl Druck- wie auch Scherspannungen.

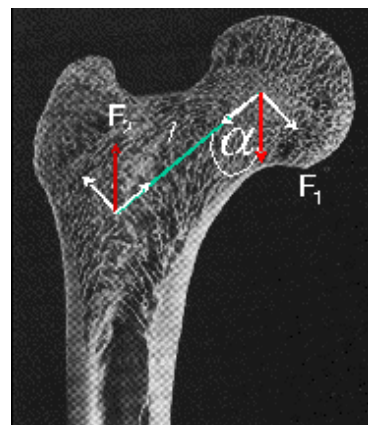


Abbildung 4.22: Kräfte im Bereich des Oberschenkelhalsknochens.

Der Oberschenkelknochen ist der größte Knochen des menschlichen Körpers. Er ist wie das Schien- und Wadenbein ein Röhrenknochen. Das bedeutet, dass er aus einem harten Mantel und einem weichen, mit Blutzellen gefüllten, Hohlraum besteht. Durch die abgewinkelte Verbindung werden Stöße auf das

Becken abgemildert. Der Schenkelhals hat in diesem Sinne eine Stoßdämpfer-Funktion.

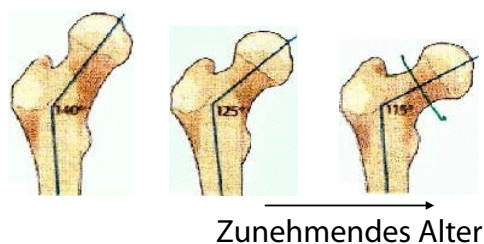


Abbildung 4.23: Änderung des Winkels des Oberschenkelhalsknorpels mit zunehmendem Alter.

Auf den Oberschenkelhalsknochen erzeugt das Kräftepaar ein besonders großes Drehmoment und damit Biegekräfte. Der Winkel (CCD-Winkel) beträgt $180^\circ - \alpha$ und ändert sich im Laufe des Alters: Er beträgt bei Neugeborenen etwa 150° , bei Erwachsenen etwa $125 - 126^\circ$, und im Alter weniger als 120° . Der Winkel α steigt somit von 30° auf mehr als 60° . Laut Gleichung (4.1) steigt damit das Drehmoment und die Zug-/Druck Belastung des Knochens. Dadurch steigt mit zunehmendem Alter die Gefahr eines Schenkelhalsbruchs, besonders bei einer eventuell vorhandenen Osteoporose.

4.3.6 Wirbelsäule

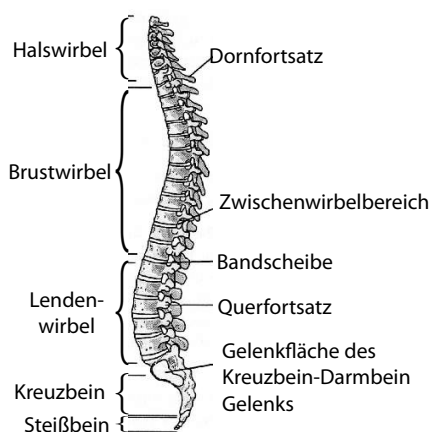


Abbildung 4.24: Wirbelsäule. [44]

Die Wirbelsäule besteht aus 33-34 Wirbeln, den

Zwischenwirbelscheiben und dem Bandapparat, der die Wirbel gegeneinander stabilisiert. Sie weist beim Menschen eine doppelte S-Form auf. Diese dient der Erschütterungsabfederung beim Laufen. Bei der Wirbelsäule treten Druck-, Zug-, Biege- und Torsionsbelastungen auf.

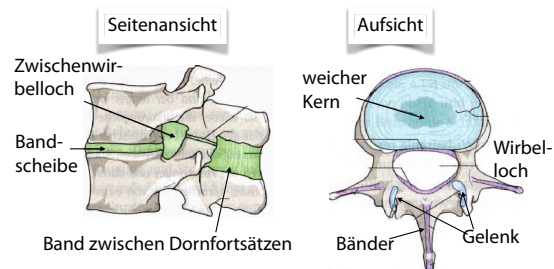


Abbildung 4.25: Wirbel.

Die Form der Wirbel variiert entlang der Wirbelsäule, wobei die Grundform einheitlich ist. Sie besteht aus dem Wirbelkörper und dem Wirbelbogen, der das Wirbelloch umschließt. In diesem läuft das Rückenmark. Die Ausläufer des Wirbelbogens greifen ineinander und stabilisieren damit, zusammen mit den Bändern, die Wirbelsäule. Die Beweglichkeit wird durch die Gelenke, die elastischen Bandscheiben, sowie die verschiedenen Bänder gewährleistet.

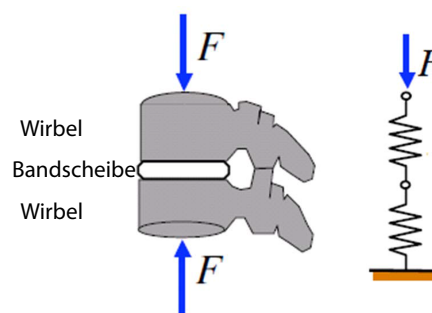


Abbildung 4.26: Modell für die Elastizität der Wirbelsäule.

In einem elastischen Modell sind die Elemente in Reihe geschaltet. Damit ist der Elastizitätsmodul

$$E_{ges} = 2 \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}$$

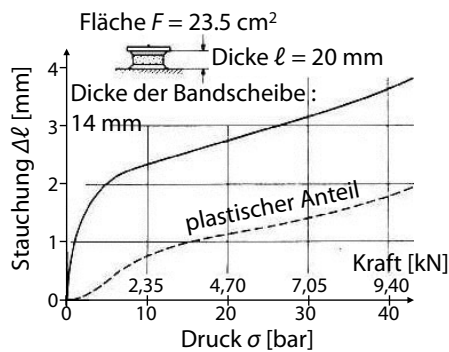


Abbildung 4.27: Druck-Stauchungsdiagramm des Lendenwirbels (a), und dessen plastischer Anteil (b).

Das Druck-Stauchungsdiagramm des Lendenwirbels in Abb. 4.27 zeigt, dass eine große Elastizität bei kleinen Kräften vorherrscht, bei größeren Kräften eine geringere. Die Belastungsgrenze liegt bei 9,4 kN, das bedeutet es sind große Belastungen möglich ohne Bruch.

Im linearen Bereich schätzen wir den Elastizitätsmodul ab aus Abb. 4.27:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{0,5 \text{ kN}}{23,5 \text{ cm}^2} \frac{14 \text{ mm}}{0,6 \text{ mm}} \approx 5 \text{ MPa} = 50 \text{ bar}.$$

Die Elastizität der Wirbelsäule ($= 1/E$) ist damit wesentlich größer als die von Metallen oder Knochen - sie wird dominiert durch die Bandscheiben.

4.4 Belastung und Bruch

4.4.1 Belastung und Widerstand

Knochen müssen unterschiedlichen Belastungen standhalten; dies können statische oder dynamische Belastungen (Stoß, Sturz) sein. Der Organismus hat verschiedene Mechanismen entwickelt, um sicherzustellen, dass normale Belastungen normalerweise nicht zu einem Versagen, d.h. in diesem Fall zum Bruch des Knochens führen. Dabei wird jedoch nicht der Knochen einzeln optimiert (z.B. durch Verstärkung), sondern die Leistungsfähigkeit und das Überleben des gesamten Organismus. Dies beinhaltet z.B.

dass die Knochen nicht beliebig schwer werden dürfen.

Wie bereits in Kapitel 4.3.1 dargestellt, reagiert der Körper auf Belastungen der Knochen indem die belasteten Bereiche verstärkt werden. Dadurch wird die Stärke der Knochen den bekannten Belastungen angepasst und gegen vergleichbare Belastungen in der Zukunft geschützt. Damit wird in erster Linie sichergestellt, dass der Knochen regelmäßige Belastungen aushalten kann. Durch eine erhebliche Sicherheitsreserve wird jedoch auch gegen stärkere, ähnliche Belastungen Vorsorge getroffen. Darüber hinaus wird durch die Strukturierung des Knochens auf der Nanometer-Mikrometerskala das Risiko für ein katastrophales Versagen reduziert. Im Gegensatz zu mechanischen Werkstücken sind Knochen in der Lage, kleinere Schäden zu reparieren.

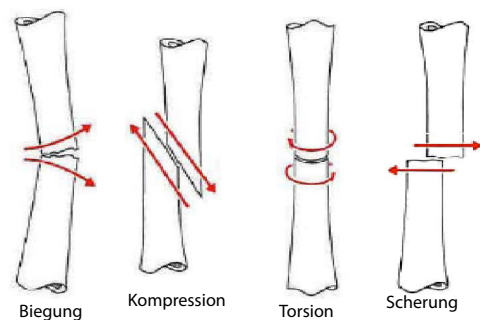


Abbildung 4.28: Unterschiedliche Belastungen eines Röhrenknochens und resultierende Knochenbrüche.

In Figur 4.28 sind unterschiedliche Belastungen dargestellt und die Art der daraus resultierenden Brüche eines Röhrenknochens (z.B. Schienbein). Wir betrachten zunächst einen relativ einfachen Fall, den Biegebruch.

4.4.2 Biegung

Wird ein Objekt gebogen, so wird es auf der einen Seite gedehnt, auf der anderen Seite komprimiert. Da die Spannung im Inneren nicht springt muss es dazwischen einen Punkt geben, wo die Normalspannung verschwindet. Verbindet man alle diese Punkte

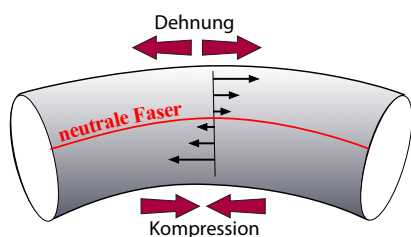


Abbildung 4.29: Neutrale Faser als Linie verschwindender Normalspannung.

entlang des Körpers, so erhält man die "neutrale Faser".

Ein fest eingespannter Stab der Dicke d , der Breite b und der Länge L biegt sich unter dem Einfluss einer Kraft F , die am nicht eingespannten Ende angreift.

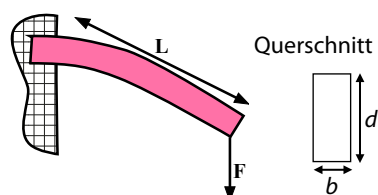


Abbildung 4.30: Biegung eines Balkens.

Die Spannung ist am größten am Einspannpunkt. Dort beträgt sie $\sigma = \frac{FL}{2\alpha d^2 b}$. Der Faktor α hängt ab vom Querschnitt des Stabes. Er beträgt 1/12 für einen rechteckigen Querschnitt, und 1/28 für einen kreisförmigen.



Abbildung 4.31: Biegebruch

Wenn $\sigma > \sigma_{Bruch}$ ist zerreißt der Stab aufgrund des Überschreitens der Bruchspannung. Die Tragfähig-

keit ist proportional zu der Dicke und Breite, aber umgekehrt proportional zur Länge. Da die Spannung auf der Außenseite am größten ist und die meisten Materialien eine geringere Bruchspannung gegen Dehnung als gegen Kompression aufweisen beginnt der Bruch auf der Außenseite.

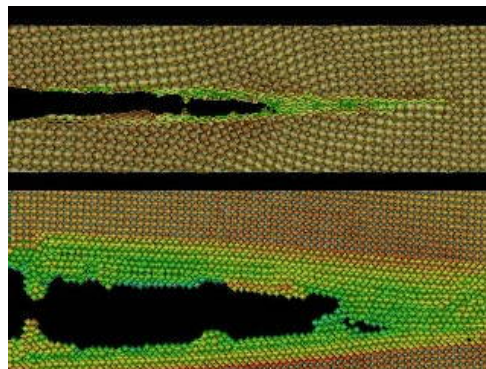


Abbildung 4.32: Atomare Simulation der Ausbreitung eines Risses.

Sobald ein Riss entsteht, wird die Spannung an der Spitze des Risses stark vergrößert und die Wahrscheinlichkeit ist groß, dass der Riss sich mit zunehmender Geschwindigkeit senkrecht durch den Stab ausbreitet. Diese qualitative Überlegung kann sowohl durch analytische Rechnungen wie auch durch atomare Simulationsrechnungen verifiziert werden.

4.4.3 Richtungsabhängige Spannungen

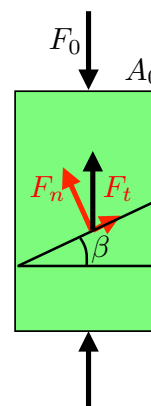


Abbildung 4.33: Normal- und Tangentialkraft bezüglich einer schiefen Ebene

Wir betrachten die Kräfte in einem Block aus homogenem Material, das mit einer Kraft F_0 auseinander gezogen (oder gestaucht) wird. Bezüglich einer Ebene, deren Normale gegen die Kraftrichtung um den Winkel β geneigt ist, sind die Normal- und Tangentialkraft

$$F_n = F_0 \cos \beta \quad F_t = F_0 \sin \beta$$

Die Fläche, auf die diese Kräfte wirken, ist

$$A = \frac{A_0}{\cos \beta}.$$

Somit haben die Normalspannung σ , resp. Schubspannung τ die Winkelabhängigkeit

$$\sigma = \frac{F_0}{A_0} \cos^2 \beta \quad \tau = \frac{F_0}{A_0} \cos \beta \sin \beta.$$

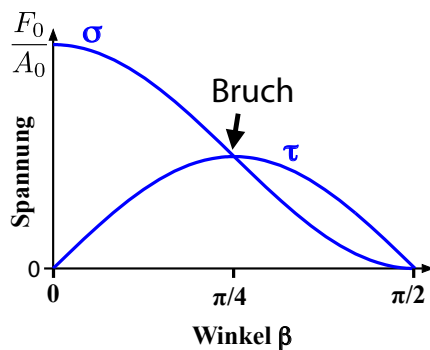


Abbildung 4.34: Winkelabhängigkeit für Druck- und Scherspannung.

Die Druckspannung nimmt deshalb kontinuierlich ab mit zunehmendem Winkel β , während die Schubspannung über ein Maximum läuft. Da Schubspannungen eher zu Brüchen führen als Druckspannungen, findet man bei isotropen Materialien häufig, dass der Bruch entlang einer Ebene verläuft, die um 45° gegenüber der Achse gekippt ist.

4.4.4 Torsion

Abb. 4.35 zeigt als Beispiel für eine Torsionsbelastung einen Zylinder der Höhe ℓ , der um einen Winkel φ verdreht wird, d.h. die Oberseite ist gegenüber der Unterseite um diesen Winkel gedreht. Im Inneren

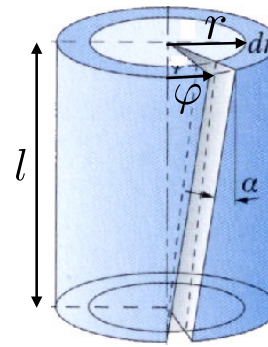


Abbildung 4.35: Torsion eines Zylinders.

entsteht dadurch eine inhomogene Spannungsverteilung, welche von innen nach außen linear zunimmt.

In einem dünnen Hohlzylinder mit Radius r ist die Scherspannung homogen. Der Scherwinkel beträgt $\alpha = r\varphi/\ell$. Gemäß der Definition des Schubmoduls G entspricht diesem Scherwinkel eine Scherspannung

$$\tau = G\alpha = G \frac{r\varphi}{\ell}. \quad (4.2)$$

Aus der Schubspannung können wir das Drehmoment $M = F r$ berechnen ($F =$ Kraft, $r =$ Abstand von der Drehachse), welches diese Torsion erzeugt. Für den betrachteten Hohlzylinder mit Radius r und Dicke dr beträgt die Fläche, an der die Schubspannung angreift, $dA = 2\pi r dr$ und die darauf wirkende Kraft

$$dF = \tau dA = \tau 2\pi r dr = G \frac{r\varphi}{\ell} 2\pi r dr.$$

Für einen Vollzylinder ergibt sich das Drehmoment durch Integration über die Beiträge aller Hohlzylinder. Diese betragen

$$dM = r dF(r).$$

Integration ergibt

$$\begin{aligned} M &= \int_0^R r dF(r) = \frac{2\pi G \varphi}{\ell} \int_0^R r^3 dr \\ &= \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{\ell} \varphi. \end{aligned}$$

Aufgelöst nach dem Drillwinkel φ als Funktion des Drehmomentes ergibt das

$$\varphi = \frac{2M}{\pi GR^4} \ell.$$

Setzt man diesen Wert in den Ausdruck (4.2) für die Scherspannung τ ein, so erhält man die Scherspannung τ als Funktion des Drehmomentes M :

$$\tau = G \frac{r\varphi}{\ell} = G \frac{r}{\ell} \frac{2M}{\pi GR^4} \ell = \frac{2Mr}{\pi R^4}.$$

Die Scherspannung nimmt somit mit dem Abstand von der Achse zu und erreicht den maximalen Wert τ_m am Rand, für $r = R$:

$$\tau_m = \frac{2M}{\pi R^3}.$$

Überschreitet dieser Wert die Bruchspannung, dann erfolgt ein **Torsionsbruch**, der an der Peripherie beginnt.

Wie beim Biegebruch steigt die Spannung an der Spitze eines sich entwickelnden Risses stark an und dieser hat deshalb die Tendenz, sich mit zunehmender Geschwindigkeit auszubreiten. Um das zu vermeiden muss die Natur

- Eine genügende Sicherheitsreserve einbauen.
- Den Knochen so strukturieren, dass kleine, sich entwickelnde Risse aufgefangen und abgelenkt werden, so dass die Spannung die Bruchspannung nicht übersteigt.

4.4.5 Widerstandsmoment

Wie stark sich ein mechanisches Element unter dem Einfluss einer äußeren Kraft verformt, hängt neben den Elastizitätsmodulen von seiner geometrischen Form ab. Man quantisiert dies mit Hilfe der Widerstandsmomente. Im Fall einer Biegespannung spricht man vom axialen Widerstandsmoment, bei einer Torsion vom polaren Widerstandsmoment. Dieses ist gleich der Summe aus den axialen Widerstandsmomenten für Biegungen in zwei senkrecht zueinander stehende Richtungen.

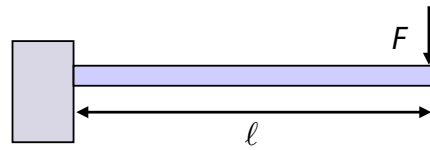


Abbildung 4.36: Einseitig eingespannter Balken mit Punktbelastung am freien Ende.

Ein einfaches Beispiel ist das eines eingespannten Stabes. Dessen Biegung wird erzeugt durch die Biegemomente $M_B = \sum_i F_i \ell_i$. Hier ist ℓ_i der Hebelarm der Kraft F_i .

Das Widerstandsmoment W ist eine rein geometrische Größe, welche als Proportionalitätskonstante zwischen dem Biegemoment und der Biegespannung B definiert ist;

$$B = \frac{M_B}{W} \quad W = \frac{J}{e_R}.$$

Hier stellt

$$J = \int z^2 dA$$

das axiale Flächenträgheitsmoment und e_R den Abstand der Randfaser von der neutralen Faser dar. Das Flächenträgheitsmoment errechnet sich als Integral über alle Flächenelemente, gewichtet mit dem Quadrat des Abstandes z von der neutralen Faser. Das Widerstandsmoment gibt an, wie gut der Stab eine Last aufnehmen kann. Es hat die Dimension eines Volumens. Dies lässt sich qualitativ leicht verstehen: Je größer der Querschnitt, desto geringer die Spannung bei gegebener Kraft. Zusätzlich führt ein großer Abstand von der neutralen Faser zu einem günstigen Hebelverhältnis.

Ein Beispiel ist das Flächenträgheitsmoment und das Widerstandsmoment für ein Rohr mit Radius R . Die Wandstärke sei $b \ll R$ und die neutrale Faser liege im Zentrum des Rohrs. In diesem Fall ist $z = R \cos \phi$ und das Flächenträgheitsmoment

$$\begin{aligned} J &= \int d\phi (R \cos \phi)^2 b R \\ &= R^3 b \int_0^{2\pi} d\phi \cos^2 \phi = \pi R^3 b. \end{aligned}$$

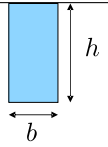
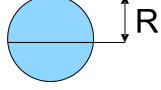
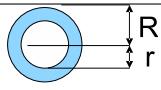
Form		Widerstandsmoment W	Querschnittsfläche A	$\frac{W}{A}$
Rechteck		$\frac{1}{6}bh^2$	bh	$\frac{1}{6}h$
Vollzylinder		$\frac{\pi}{4}R^3$	πR^2	$\frac{1}{4}R$
Hohlzylinder		$\frac{\pi}{4} \frac{R^4 - r^4}{R} = \frac{\pi}{4} R^3 \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right)$	$\pi(R^2 - r^2)$	$\frac{1}{4} \frac{R^2 + r^2}{R}$

Tabelle 4.3: Axiale Widerstandsmomente für unterschiedliche Querschnitte und Belastung in vertikaler Richtung.

Damit wird das Widerstandsmoment

$$W = \frac{J}{R} = \pi R^2 b.$$

Ofenbar ist die Dimension des Widerstandsmoments ein Volumen,

$$[W] = \text{m}^3.$$

Tabelle 4.3 listet Widerstandsmomente für einige unterschiedliche Querschnitte. Interessant ist z.B. dass ein Hohlzylinder ein fast gleich großes Widerstandsmoment aufweist wie ein Vollzylinder, bei deutlich kleinerem Gewicht. So ist z.B. bei $r = 0.5R$ das Gewicht 25 % geringer, aber das Widerstandsmoment nur 6 % geringer. Aus diesem Grund sind menschliche Knochen meist als Röhrenknochen gebaut.

4.4.6 Spannungsverteilung entlang eines Stabes

Die Biegemomente M_B eines einseitig eingespannten Balkens unter Punktbelastung durch eine Kraft F am distalen Ende nehmen linear mit dem Abstand x zur Punktbelastung zu,

$$M_B = Fx$$

(siehe Fig. 4.37). Bei einem homogenen Körper mit konstantem Querschnitt ist die Biegespannung

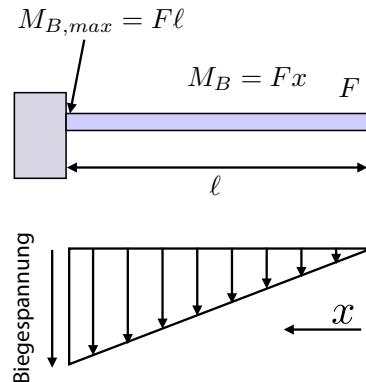


Abbildung 4.37: Biegemomente beim einseitig eingespannten Balken mit Punktbelastung am Ende.

proportional zum Biegemoment am entsprechenden Ort. Das Dreieck in Abbildung 4.37 zeigt die Biegespannungen für einige Querschnitte (am jeweiligen Ort x), senkrecht zur Körperkontur dargestellt. Solche Biegespannungsverteilungen zeigen mögliche Schwachpunkte und spielen deshalb eine wichtige Rolle in der Biomechanik. Beim gezeigten Beispiel wird das Biegemoment maximal bei $x = l$, an der Stelle wo der Stab eingespannt ist:

$$M_{B,max} = F\ell.$$

An dieser Stelle ist die Bruchgefahr am größten. Offensichtlich ist ein solcher Körper nicht effizient: er

ist zu stark am freien Ende und zu schwach am eingespannten Ende. Ein optimierter Stab sollte eine andere Form besitzen.

4.4.7 Körper konstanter Festigkeit

Man spricht von einem “Körper konstanter (oder gleicher) Festigkeit” wenn er so geformt ist, dass in jedem Querschnitt die gleichen Biegespannungen auftreten. Dies ist das Ziel einer optimalen Nutzung vorhandener Ressourcen: es sollen die Stellen verstärkt werden, an denen die größten Kräfte auftreten. Außerdem vermeidet man damit, überflüssiges Gewicht mitzutragen. Im menschlichen Körper wird dies dadurch erreicht, dass der Knochen dort verstärkt wird, wo die größten Belastungen auftreten.

Die Biegebeanspruchung darf an keiner Stelle die zulässige Biegespannung B_Z übersteigen. Ein Träger konstanten Querschnitts (Abbildung 4.37) kann daher basal (= an Basis (Körper) gelegen) zu dünn und distal (= vom Körper nach außen gerichtet) zu dick sein. Es ist sinnvoll, den Körper “anzuformen” bis die Biegespannung konstant ist (zumindest in etwa bei komplizierteren Gebilden).

Als Beispiel soll der Körper gleicher Festigkeit bei dem einseitig eingespannten Träger mit distaler Punktbelastung berechnet werden. Dabei soll die Breite b konstant gehalten werden, und nur die Höhe $h(x)$ geeignet gewählt werden. Der Ursprung des Koordinatensystems befinde sich am Ende des Trägers, d.h. am Ort wo die Kraft F ansetzt. x bezeichnet die Position auf dem Träger. Damit beträgt das Biegemoment

$$M_B(x) = Fx$$

und erreicht seinen maximalen Wert bei $x = \ell$:

$$M_{B,max} = F\ell.$$

Für einen rechteckigen Querschnitt ist das Widerstandsmoment laut Tabelle 4.3

$$W(x) = \frac{1}{6}b(h(x))^2.$$

Aus der Forderung, dass Biegespannung und Biegemoment über den Träger konstant sein sollen,

$$\sigma = \frac{M_{B,max}}{W_{max}} = \frac{M_B(x)}{W(x)} = \text{konst.}$$

folgt somit

$$\frac{F\ell}{\frac{1}{6}bh_{max}^2} = \frac{Fx}{\frac{1}{6}bh^2(x)}.$$

Auflösen nach $h(x)$ ergibt die Anformungsgleichung als Höhenverteilung über die Trägerlänge ℓ :

$$h(x) = h_{max} \sqrt{\frac{x}{\ell}},$$

wobei h_{max} die maximale Höhe des Trägers am Einspannungspunkt ist. Die optimale Form des Trägers ist also eine Parabel.

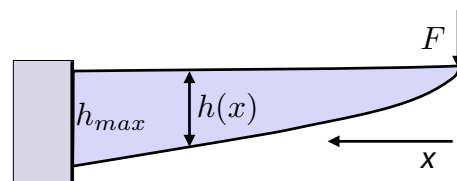


Abbildung 4.38: Körper gleicher Festigkeit beim einseitig eingespannten Träger unter distaler Punktbelastung.

Alternativ kann man die Form ausrechnen für den Fall, dass die Belastung nicht am Ende angreift, sondern gleichmäßig über die Länge verteilt ist. In diesem Fall ist die optimale Form $h(x) \propto x$.

4.4.8 Optimierung der Elle

Als eine weitere Anwendung wird im Folgenden die Ulna (Elle) des Menschen als Körper gleicher Festigkeit diskutiert.

Es wird angenommen, dass ein Mensch eine schwere Kugel in der Hand hält, wobei der Unterarm waagrecht ausgestreckt ist (Abbildung 4.39). Das (Ausgangs-)Modell der Ulna ist ein waagrecht Stab mit konstantem Querschnitt. Die Oberarmmuskeln werden durch einen Seilzug mit der Kraft T_1 modelliert. In diesem Fall sind die Zug- und Druckspannungen gleich und wachsen linear mit dem Abstand von der Kugel. Abgesehen davon, dass die Werte unphysiologisch hoch sind, wäre auch der sich ergebende Körper gleicher Festigkeit unförmig dick (Abbildung 4.40 links).

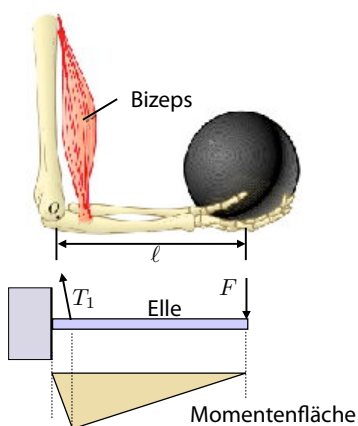


Abbildung 4.39: Unterarm mit Gewicht.

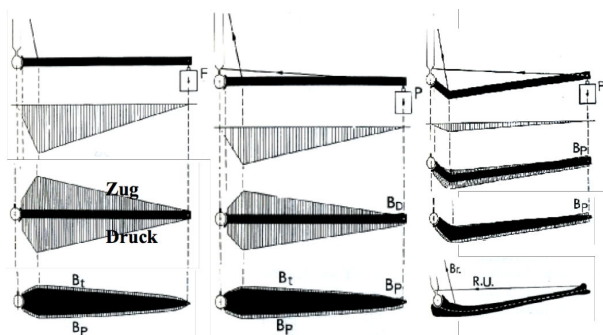


Abbildung 4.40: Ulna des Menschen als Körper gleicher Festigkeit.

Betrachtet man zusätzlich die wirkenden zweigelenkigen Unterarmmuskeln als Zuggurtung, dann reduziert dieser Seilzug die Momentenfläche, wie in der Abbildung 4.40 in der Mitte gezeigt. Die Spannungsfläche ist ebenfalls reduziert, trotzdem wäre der zugehörige Körper gleicher Festigkeit immer noch zu dick. Eine drastische Entlastung bringt das Abknicken der Ulna an der Ansatzstelle der Oberarmmuskeln (Abbildung 4.40 rechts). Auch die Biegespannungen sind deutlich reduziert.

Es sind nun nur noch geringe Veränderungen nötig, um den geknickten Stab gleicher Dicke in einen Körper gleicher Festigkeit zu überführen: Verdickung an der Knickregion und eine Verdünnung am freien Ende. Die daraus resultierenden Umrisse ähneln schon sehr der menschlichen Ulna (Abbildung 4.40 rechts unten). Die Endform besitzt eine geringere Masse als die Ausgangsform (gerader Stab), aber eine op-

timierte Massenverteilung. Das Resultat ist eine Reduktion der maximalen Spannung auf rund 10% der Ausgangswerte.



Abbildung 4.41: Menschliche Ulna.

Die Abweichungen von der eigentlichen Form der menschlichen Ulna sind im Wesentlichen auf die begrenzte Belastbarkeit der Gelenkknorpel und der Notwendigkeit für Ansatzstellen und Drehabstände für die Skelettmuskulatur zurückzuführen.

4.4.9 Belastungen der Wirbelsäule

Die Wirbelsäule muss sehr unterschiedlichen Belastungen standhalten.

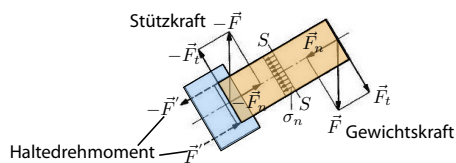


Abbildung 4.42: Homogener Stab als Modell für die Wirbelsäule.

Abb. 4.42 zeigt ein einfaches Modell für die Wirbelsäule: sie wird als homogener elastischer Stab betrachtet, welcher im Becken eingespannt und gegenüber der Vertikalen geneigt ist. Das Gewicht (oder Gewicht plus zusätzliche Last) \vec{F} wirkt vertikal und wir fassen die verteilten Kräfte in einem Ansatzpunkt zusammen. Diese Gewichtskraft \vec{F} muss durch eine Stützkraft $-\vec{F}$ kompensiert werden, welche in unserem Modell am Becken angreift. Die Last \vec{F} und die Stützkraft können in eine Normalkraft \vec{F}_n und eine Transversalkraft \vec{F}_t zerlegt werden. Wie in Abb. 4.42 dargestellt, ergibt die Normalkraft eine homogene Druckbelastung über den Querschnitt der Wirbelsäule.

Das Kräftepaar $\vec{F}_t, -\vec{F}_t$ erzeugt ein Drehmoment und damit eine Biegebelastung, welche in Abb. 4.43

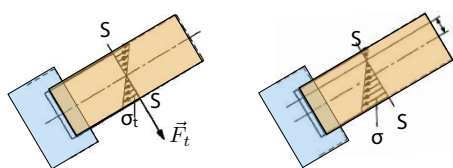


Abbildung 4.43: Spannungsverteilung im Modell für die Wirbelsäule. Links: : Effekt von F_t ; rechts: Effekt von $\vec{F} = \vec{F}_n + \vec{F}_t$.

links dargestellt ist. Durch die Überlagerung der beiden Spannungen wird die Zugspannung reduziert (was günstig ist), aber die Druckspannung am unteren Rand der Wirbelsäule erhöht. Abb. 4.43 zeigt die entstehende Spannungsverteilung. Die linke Figur stellt den Effekt des Kräftepaars $\pm F_t$ dar, die rechte berücksichtigt zusätzlich die Normalspannung F_n . In diesem Fall ist die Zugbelastung günstiger, aber die Schubspannung größer.

4.4.10 Energieaufnahme

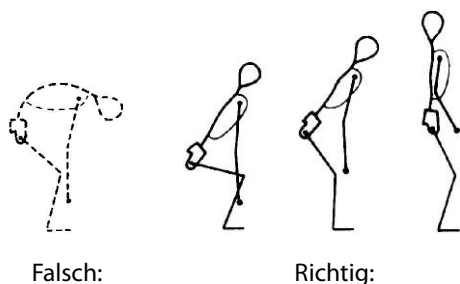


Abbildung 4.44: Ungünstige, resp. günstige Haltung beim Anheben von Lasten.

Zu hohe Druckspannungen können unter Anderem dazu führen, dass die Bandscheiben zwischen den Wirbeln beschädigt werden. Solche Belastungen, insbesondere transversale Kräfte \vec{F}_t sollten deshalb gering gehalten werden, indem die Last möglichst entlang der Wirbelsäule gerichtet wird. Dies kann z.B. durch eine aufrechte Haltung beim Heben von Lasten erreicht werden, wie in Abb. 4.44 gezeigt.

Bei Sprüngen können für kurze Zeiten sehr hohe Belastungen auftreten, wobei es sich in erster Linie um

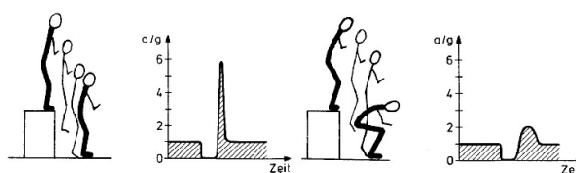


Abbildung 4.45: Belastung beim Sprung.

Normalspannungen handelt. Springt man aus einer Höhe h , so hat man beim Auftreffen auf den Boden eine Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$, welche auf 0 reduziert werden muss. Dies kann entweder durch eine hohe Beschleunigung und damit starke Kräfte auf einem kurzen Weg geschehen, oder auf einem längeren Weg mit entsprechend geringeren Kräften. Praktisch kann man die Spitzenbelastung gering halten, wenn man sie mit Hilfe der Beinmuskulatur abfedert. Das Integral der Belastung ist konstant: die Dauer der verschwindenden Belastung in Abb. 4.45 ist durch die Dauer des freien Falls gegeben und muss durch das Integral der positiven Spitze kompensiert werden. Eine niedrigere Spitze kann somit durch eine längere Dauer erreicht werden.

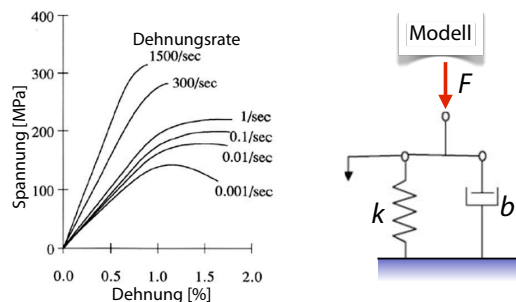


Abbildung 4.46: Viskoelastische Eigenschaften von Knochen. Links: Spannungs-Dehnungs Diagramme für unterschiedliche Dehnungsraten. Rechts: vereinfachtes Modell mit einem Hooke'schen Term und einem geschwindigkeitsabhängigen Dämpfungsterm.

Knochen sind nicht rein elastisch, sie haben auch viskoelastische Eigenschaften. Dies bedeutet, dass ihre elastischen Parameter davon abhängen, wie schnell die Spannung angelegt wird. Wie in Abb.

4.46 gezeigt, kann dies dadurch modelliert werden, dass zusätzlich zum Hooke'schen Term ein Dämpfungsterm eingebaut wird, welcher nicht vom Ort, sondern von der Geschwindigkeit abhängt.

4.5 Muskeln

Die Muskulatur hat gegenüber anderen Gewebetypen die Fähigkeit zur Kontraktion. Die Anregung zur Kontraktion erfolgt über elektrische Stimulation durch Nervenzellen oder über chemische Botenstoffe.

4.5.1 Muskeltypen

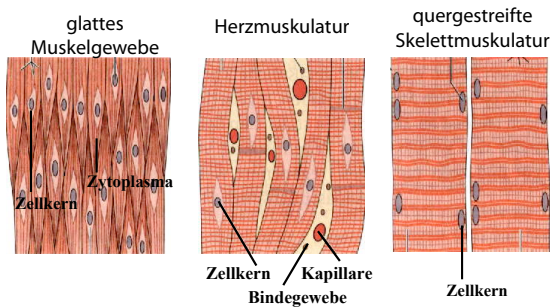


Abbildung 4.47: Die drei Muskeltypen

Es werden 3 Typen von **Muskelgewebe** unterschieden: Herz-, Skelett- und glatte Muskulatur. Die **glatte Muskulatur** stellt das ursprünglichste Muskelgewebe dar und ist hauptsächlich an den Wänden von Eingeweiden zu finden, sowie in den Augen, Atemwegen, Haaren und Drüsen. Diese Muskulatur bewegt sich meist langsam, kann aber lange Zeit kontrahiert bleiben. Die Auslösung der Kontraktion erfolgt durch chemische Botenstoffe.

Das **Herzmuskelgewebe** stellt morphologisch eine Übergangsform zwischen glatter und quergestreifter Muskulatur dar. Bei den quergestreiften Muskeln (Herz- und Skelettmuskulatur) sind die einzelnen Filamente regelmäßiger angeordnet als bei der glatten Muskulatur. Dies führt zur Unterscheidbarkeit unter dem Lichtmikroskop.

Die **Skelettmuskulatur** ist das mit Abstand am stärksten ausgebildete Organ des Menschen und besitzt einen Anteil von 40 – 50% des gesamten Körpergewichtes. Sie wird von Nerven des willkürlichen Nervensystems gesteuert.

4.5.2 Aufbau

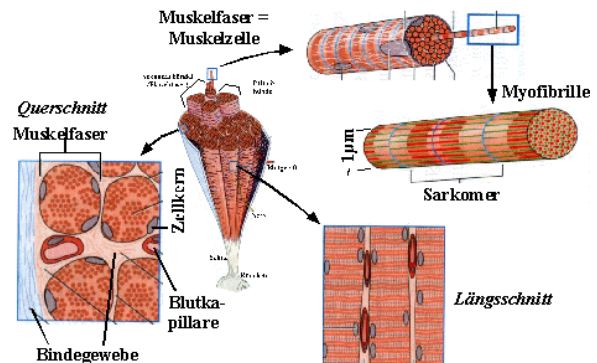


Abbildung 4.48: Aufbau der Muskeln.

Die Muskelfasern sind im Muskel zusammengefasst in **Muskelfaserbündel** und bilden die funktionellen Einheiten des Skelettmuskels. Jede **Muskelfaser (=Muskelzelle)** ist ein langer Zytoplasmaschlauch. Bei der Skelettmuskulatur fehlen die Zellgrenzen, so dass eine Zelle mehrere Hundert Zellkerne besitzt, die am Rand liegen. Daher sind Muskelzellen fadenförmige Zellen mit einem Durchmesser von 10 – 100 µm, die mehrere Zentimeter lang sein können. Sie durchlaufen meist die gesamte Länge eines Muskels. Am Ende gehen sie in bindegewebsartige **Sehnen** über, durch die der Muskel am Knochen befestigt ist. Sie sind eingebettet in Bindegewebe und werden durch Blutkapillaren versorgt. Das Bindegewebe verleiht Halt und ermöglicht ein Gleiten der Muskelfasern gegenüber ihrer Umgebung.

Nerven, welche für die Aktivierung verantwortlich sind, führen zu jeder Muskelfaser. Muskeln benötigen eine gute Durchblutung, um Sauerstoff und Nährstoffe zur Verfügung zu stellen. Die Durchblutung ist stark von der Aktivität abhängig und kann bei aktivierten Muskeln gegenüber dem Ruhezustand um mehr als eine Größenordnung zunehmen.

Eine Muskelzelle ist in Hunderte von sich verkür-

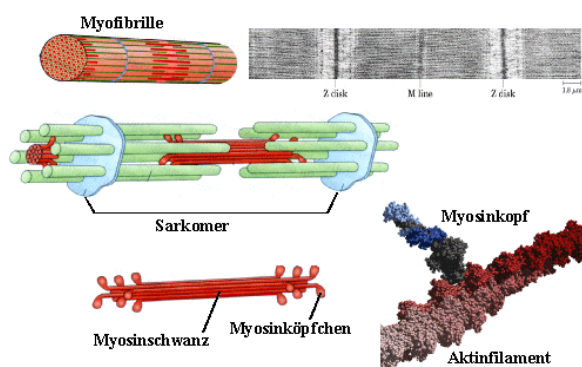


Abbildung 4.49: Aufbau einer Myofibrille.

zenden (kontraktile) **Myofibrillen** gegliedert. Sie sind parallel zueinander in der Längsachse einer Muskelzelle angeordnet und durch querverlaufende Trennwände (**Z-Scheiben**) in viele ungefähr $2.5\mu\text{m}$ lange Einheiten (**Sarkomere**) gegliedert.

Diese setzen sich wiederum aus Aktinfilamenten (globuläre Proteine) und den Myosinfilamenten zusammen.

4.5.3 Muskelkontraktion

Eine Muskelkontraktion kann durch das Gleitfasermodell beschrieben werden, in dem Aktin- und Myosinfilamente ineinander hinein geschoben werden.

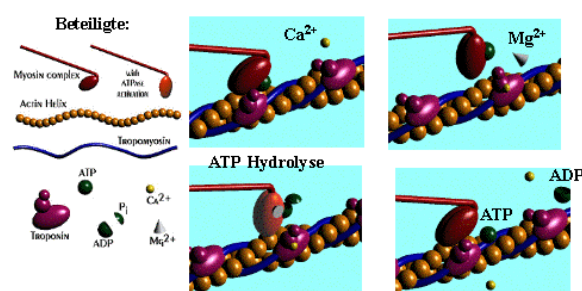


Abbildung 4.50: Bewegung des Myosinköpfchens beim Filamentgleiten. [12]

Eine Muskelkontraktion läuft folgendermaßen ab: Zunächst binden sich die Myosinköpfchen (die in der Mitte des Sarkomers an beiden Seiten in die Aktinfilamente hineinragen) an die Aktinfilamente,

die jeweils an den Z-Scheiben eines Sarkomers verankert sind. Durch eine nachfolgende Kipp- oder Ruderbewegung werden die Aktinfilamente in Richtung Sarkomermite gezogen.

Der Vorgang wird von Ionen gesteuert und ATP liefert die Energie: Ein Ca^{2+} Ion aktiviert ein Troponin, damit das Myosinköpfchen dort binden kann. Ein Mg^{2+} Ion initiiert die Spaltung von ATP. Dadurch knickt das Myosin-Köpfchen und zieht das Aktinfilament näher; der Sarkomer verkürzt sich. Danach wird die Myosin-Troponin Verbindung gelöst und der Zyklus beginnt neu.

Das Sarkomer verkürzt sich dabei, aber die einzelnen Filamente behalten ihre Länge, sie gleiten nur aneinander vorbei. Eine Ruderbewegung aller etwa 500 Myosinköpfchen kann ein Sarkomer nur um etwa 1% verkürzen. Für eine maximale Muskelkontraktion müssen sich die Binde- und Rudervorgänge etwa 50 mal schnell hintereinander abspielen. Die Energiequelle für die Muskelkontraktion ist das ATP.

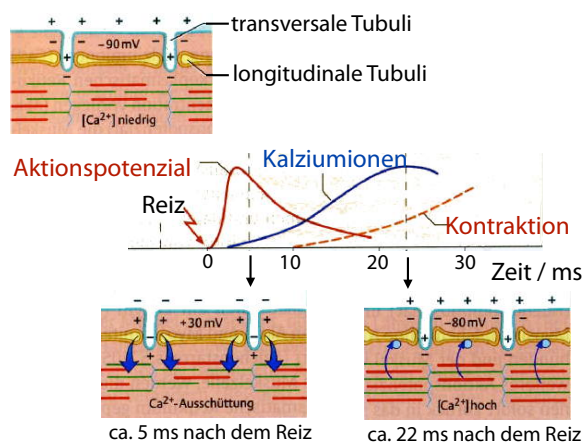


Abbildung 4.51: Stimulierung von Muskelfasern. [12]

Die Kontraktion wird ausgelöst, indem ein Nervenimpuls das Membranpotenzial erniedrigt. Wenn dies geschieht, werden aus dem sarkoplasmatischen Retikulum (longitudinale Tubuli) Ca^{2+} -Ionen freigesetzt. Diese sind dafür verantwortlich, dass die Myosinköpfchen an ihre Bindungsstellen am Aktinfilament andocken und sich wieder lösen können.