

9 Das Auge

In diesem Kapitel behandeln wir die klassischen optischen Grundlagen des visuellen Systems des Menschen, sowie einige Aspekte der Bildentstehung. Kohärente Optik (Laser) und ihre Anwendungen in der Grundlagenforschung sowie in der medizinischen Therapie werden im Teil 2 der Vorlesung behandelt.

Literatur zu diesem Kapitel:

- A. Faller, M. Schünke, Der Körper des Menschen, Thieme.
- J. Bille, W. Schlegel (Hrsg.), Medizinische Physik, Band 3: Medizinische Laserphysik Springer; Kapitel 1: Das visuelle System des Menschen; Kapitel 2: Optische Komponenten.
- Bergmann, Schäfer, Experimentalphysik; Band 3: Optik, de Gruyter.
- Paul Davidovits, Physics in Biology and Medicine, Academic Press; Chapter 15: Optics.

9.1 Licht und Optik

9.1.1 Frequenzen und Wellenlängen

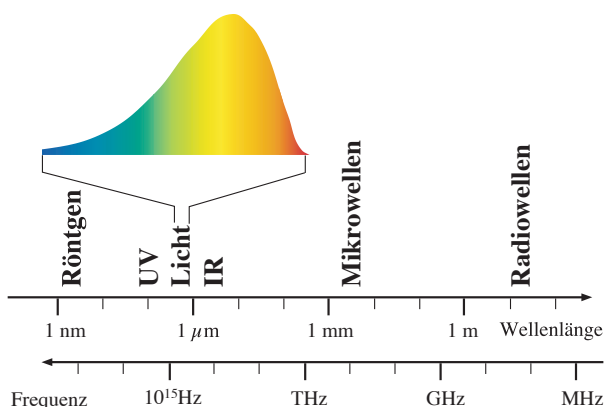


Abbildung 9.1: Spektrum der elektromagnetischen Wellen.

Abbildung 9.1 zeigt eine Übersicht über das elektromagnetische Spektrum. Dieses Kapitel ist eine Anwendung und eine Weiterführung der Theorie elektromagnetischer Wellen. Die theoretischen Grundlagen sind durch Maxwell's Gleichungen gut abgedeckt, wobei man für einige Aspekte die Quantenmechanik berücksichtigen muss. In diesem Rahmen interessiert uns nur der sichtbare Bereich des Spektrums.

Man kann sich natürlich fragen, weshalb gerade dieser Wellenlängenbereich für uns sichtbar ist. Dies hat verschiedene Gründe. Unter anderem ist die Erdatmosphäre in diesem Bereich relativ durchlässig, so dass genügend Licht von der Sonne zur Verfügung steht. Bei größeren Wellenlängen ist einerseits weniger Licht vorhanden, andererseits wird dort auf der Erde durch Wärmestrahlung Strahlung erzeugt. Allerdings kann ein Auge nicht sehr effektiv funktionieren, wenn es die Wärmestrahlung des eigenen Körpers wahrnimmt - man würde auch bei geschlossenen Augen große Helligkeit "sehen".

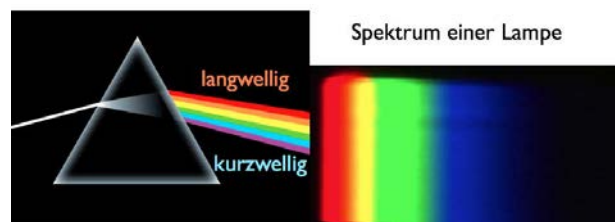


Abbildung 9.2: Zerlegung des weißen Lichts.

Auch im Bereich des sichtbaren Lichts findet man unterschiedliche Wellenlängen. Diese entsprechen unterschiedlichen Farben des Lichts. Sichtbares Licht enthält unterschiedliche Wellenlängen, wobei wir den kurzwelligen Bereich blau sehen, den langwelligen Bereich rot. Man kann dies im Experiment leicht nachweisen indem man einen Strahl weißen Lichts auf ein Prisma schickt. Rotes und blaues Licht wird darin unterschiedlich gebrochen und kann des-

halb dahinter getrennt beobachtet werden.



Abbildung 9.3: Additive und subtraktive Farbmischung.

Farben können durch Addition von monochromatischen Wellenzügen erzeugt werden (additive Farbmischung) oder durch die Subtraktion von einzelnen Farben aus weißem Licht.

9.1.2 Beschreibung

Prinzipiell können alle Phänomene, die elektromagnetische Strahlung involvieren durch die Quantenelektrodynamik beschrieben werden. Für viele Anwendungen reicht jedoch eine einfachere Beschreibung. Wir verwenden

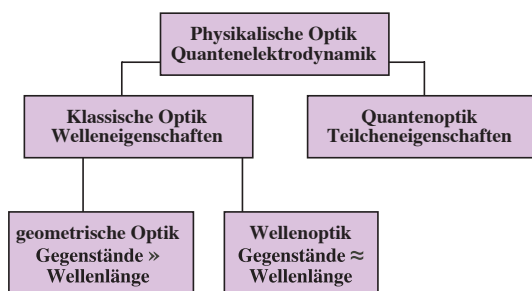


Abbildung 9.4: Die verschiedenen Teilgebiete der Optik.

Geometrische Optik oder Strahlenoptik: Licht kann mit als Strahlen beschrieben werden wenn die interessanten Dimensionen groß sind im Vergleich zur Wellenlänge des Lichts. Diesen Bereich versucht man immer zu treffen wenn man Abbildungen macht, also z.B. in der Fotografie. Die Bedingung

führt aber z.B. dazu, dass man auch bei sehr viel Licht die Blende nicht beliebig klein machen kann.

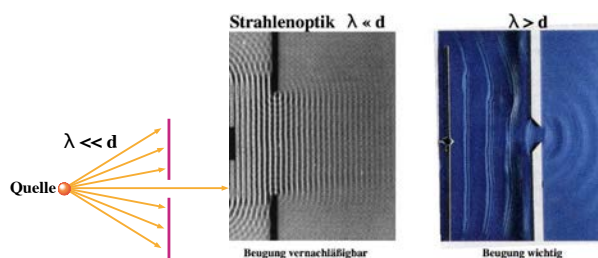


Abbildung 9.5: Strahlenoptik vs. Beugungseffekte.

Wellenoptik: Ist diese Bedingung nicht mehr erfüllt, so muss man den Wellencharakter des Lichtes berücksichtigen; es treten zusätzliche Effekte wie Beugung und Interferenz auf. Dieser allgemeinere Bereich wird durch die Maxwell Gleichungen abgedeckt.

Quantenoptik: Wenn die Wechselwirkung mit materiellen Systemen involviert ist, so müssen diese meist quantenmechanisch beschrieben werden. Allerdings kann man die Beschreibung des elektromagnetischen Feldes selbst in den meisten Fällen weiterhin klassisch halten. Man nennt dies die semiklassische oder halbklassische Näherung.

9.1.3 Wellengleichung

Ausgangspunkt sind die Maxwell Gleichungen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho_{el} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}, \end{aligned}$$

wobei wir annehmen, dass keine freien Ladungen vorhanden sind, $\rho_{el} = 0$, $\vec{j} = 0$. Außerdem diskutieren wir ausschließlich nichtmagnetische Materialien, $\mu_r = 1$.

Daraus kann man eine Wellengleichung erhalten, wenn man die Rotation der dritten Gleichung und die zeitliche Ableitung der vierten Gleichung vergleicht:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}.$$

Wir ersetzen $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ und $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ und erhalten

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{H} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Wir eliminieren das magnetische Feld und erhalten

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Wir verwenden die Identität

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \Delta \vec{u}$$

und die Annahme, dass der Raum frei von Ladungen sei, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, um daraus die Wellengleichung

$$\frac{c^2}{\epsilon_r} \Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (9.1)$$

zu erhalten. Hier ist

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Welle im Vakuum.

9.1.4 Brechungsindex

In Materie ist die Lichtgeschwindigkeit geringer als im Vakuum, um den Brechungsindex $n = \sqrt{\epsilon_r}$.

Typische Werte für die Brechzahl liegen je nach Material zwischen 1 und 3.

Die Brechzahl ist abhängig von der Wellenlänge. In vielen transparenten Materialien steigt die Brechzahl an, wenn die Wellenlänge kürzer wird, d.h. mit

Substanz	Brechzahl
Festkörper	
Diamant (C)	2.417
Eis (H ₂ O)	1.309
Quarzglas	1.458
Silikat-Flintglas	1.612
Wasser	1.333

Tabelle 9.1: Brechungsindex einiger Substanzen bei $\lambda = 589 \text{ nm}$.

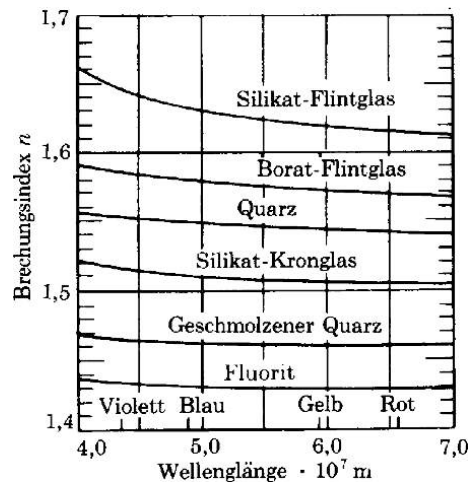


Abbildung 9.6: Brechungsindizes als Funktion der Wellenlänge.

zunehmender Frequenz. Gemäß der elektromagnetischen Wellengleichung ist der Brechungsindex gegeben als

$$n = \sqrt{\epsilon_r}.$$

In den meisten Materialien liegt μ_r nahe bei 1, so dass der Ausdruck vereinfacht werden kann. Die Dielektrizitätskonstante und der Brechungsindex sind stark von der Frequenz (resp. Wellenlänge) der Strahlung abhängig.

So beträgt die Dielektrizitätskonstante von Wasser für ein statisches Feld ($\omega = 0$) 81, was einem Brechungsindex von ≈ 9 entsprechen würde. Für sichtbares Licht liegt der Brechungsindex in der Gegend von 1.33. Der Grund liegt darin, dass die unterschiedlichen Beiträge zur elektrischen Polarisation unterschiedlich schnell sind. Im optischen Bereich

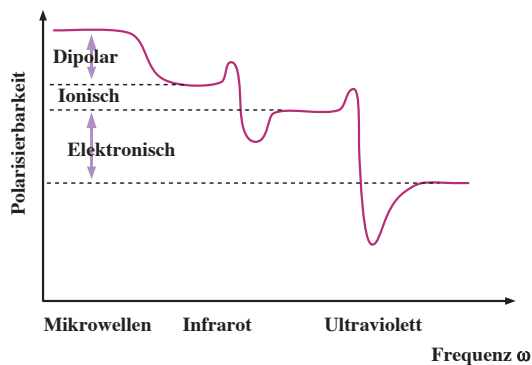


Abbildung 9.7: Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante von der Frequenz.

können nur noch die elektronischen Beiträge der äußeren Anregung folgen, während dipolare oder ionische Anregungen gemittelt erscheinen.

9.1.5 Absorption und Dispersion

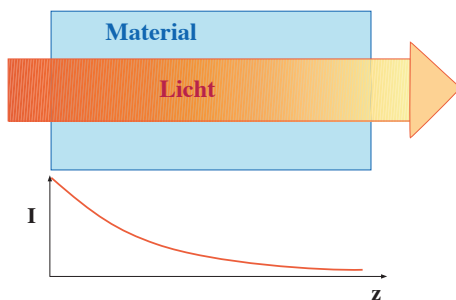


Abbildung 9.8: Abschwächung des Lichtes durch Absorption.

Wenn Licht sich in Materie ausbreitet, nimmt die Intensität ab. Dies ist auf Absorption und Streuung zurückzuführen. In den meisten Fällen ist die Verringerung der Intensität des Lichtes bei der Durchquerung einer dünnen Schicht direkt proportional zur Intensität des einfallenden Lichtes,

$$\frac{dI}{dz} = -\alpha I,$$

wobei die Proportionalitätskonstante α die Dimension einer inversen Länge aufweist. Die Lösung ist

$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z},$$

d.h. die Intensität fällt exponentiell ab. Die Proportionalitätskonstante α ist somit das Inverse der Distanz, über welche die Intensität auf $1/e$ abfällt. Diese Distanz wird als Absorptionslänge bezeichnet.

Absorption und Dispersion sind eng miteinander verknüpft; auf einer mikroskopischen Ebene stellen beide nur unterschiedliche Aspekte des gleichen Phänomens dar, nämlich der resonanten Anregung von elektromagnetischen Schwingungen im Material, welche bei wohl definierten Wellenlängen, resp. Frequenzen auftreten.

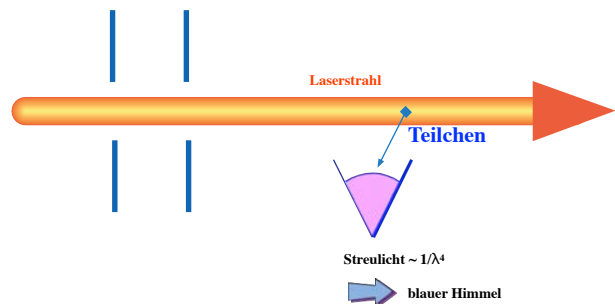


Abbildung 9.9: Streuung aus einem Lichtstrahl.

Licht wird nicht nur absorbiert, sondern auch gestreut, wenn das Medium inhomogen ist. In diesem Fall ist die Wellenlängenabhängigkeit nicht (nur) durch die molekulare Struktur des Materials bestimmt, sondern (auch) durch die Größe der Partikel, welche die Streuung verursachen. Über einen gewissen Bereich ist die Streuung proportional zu λ^{-4} , d.h. kürzere Wellenlängen werden wesentlich stärker gestreut als lange. Diese Abhängigkeit führt u. A. dazu, dass der Himmel blau ist: Der kurzwellige Anteil des Sonnenlichtes wird durch Partikel in der Erdatmosphäre stärker gestreut und erscheint als diffuses Hintergrund-Licht auf der Erde. Der längerwellige rote Teil des Spektrums wird weniger stark gestreut. Der Effekt ist am stärksten wenn die Sonne einen langen Weg durch die Atmosphäre zurückgelegt hat, z.B. am Abend. Deshalb erscheint die Sonne bei Sonnenuntergang rot.

9.1.6 Polarisation

Im Kapitel 9.1.3, hatten wir gesehen, dass die Wellengleichung für die elektrische Komponente ei-

ner elektromagnetischen Welle geschrieben werden kann als (siehe Gl. (9.1)):

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\epsilon_r} \Delta \vec{E}.$$

Eine mögliche Lösung für Ausbreitungsrichtung $\parallel z$ ist

$$\vec{E}(x, y, z) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_z z)}$$

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{A}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_z z)}.$$

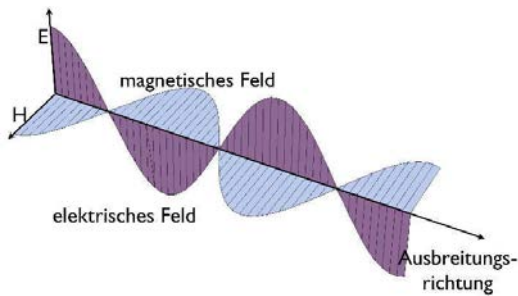


Abbildung 9.10: Elektromagnetische Welle.

Offenbar breitet sich diese Welle entlang der z -Achse aus, das elektrische Feld ist parallel zur x -Achse, das magnetische parallel zur y -Achse. Wie bei anderen transversalen Wellen muss auch hier aufgrund der Symmetrie des Problems eine gleichwertige Lösung existieren, bei der das elektrische Feld parallel zur y -Achse und das magnetische parallel zur $-x$ -Achse liegt.

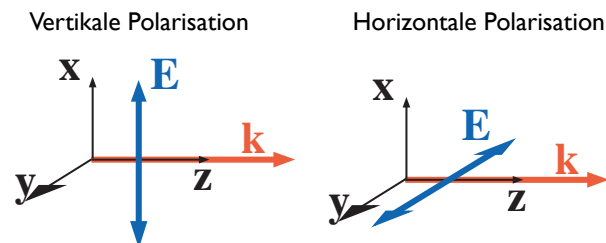


Abbildung 9.11: Vertikal und horizontal polarisierte Wellen.

Diese beiden Lösungen werden als unterschiedlich polarisierte Wellen bezeichnet. Entsprechend der Richtung der elektrischen Feldkomponente spricht man von vertikal oder horizontal polarisiertem Licht.

Im isotropen Raum besitzen diese beiden Wellen den gleichen Wellenvektor und die gleiche Frequenz. Jede Linearkombination davon ist damit ebenfalls eine Lösung mit dem selben Wellenvektor und der selben Frequenz. Wir bezeichnen die beiden Polarisierungen als \vec{e}_1, \vec{e}_2 , und deren Superposition als

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = (\vec{e}_1 E_1 + \vec{e}_2 E_2) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}.$$

Dabei sind E_1 und E_2 komplexe Zahlen: der Imaginärteil bezeichnet den Phasenunterschied zwischen den beiden Wellen.

9.1.7 Polarisationszustände

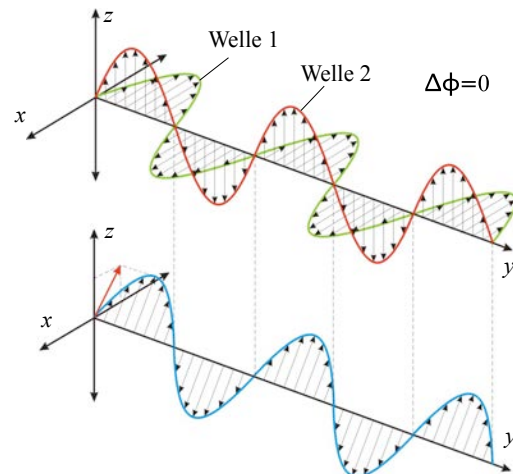


Abbildung 9.12: Linear polarisierte Welle. Oben sind die beiden Basiszustände dargestellt, unten die resultierende Welle.

Als ein Beispiel wählen wir die Polarisationszustände \vec{e}_1 und \vec{e}_2 entlang der x - und y -Achse. Für $E_1 = 1, E_2 = 1$ sind die beiden Wellen in Phase und ihre Überlagerung ist eine linear polarisierte Welle, deren elektrische Feldkomponente entlang der Winkelhalbierenden gerichtet ist. Allgemein erhält man linear polarisiertes Licht, wenn E_1 und E_2 die selbe Phase aufweisen, also z.B. beide reell oder beide

rein imaginär sind. Das Verhältnis der Amplituden bestimmt die Richtung der Polarisations Ebene.

Als zweites Beispiel wählen wir $E_1 = 1, E_2 = \pm i$. Damit erhalten wir für die physikalische Lösung, also den Realteil

$$\vec{E} = A \begin{pmatrix} \cos(\omega t - k_z z) \\ \sin(\omega t - k_z z) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

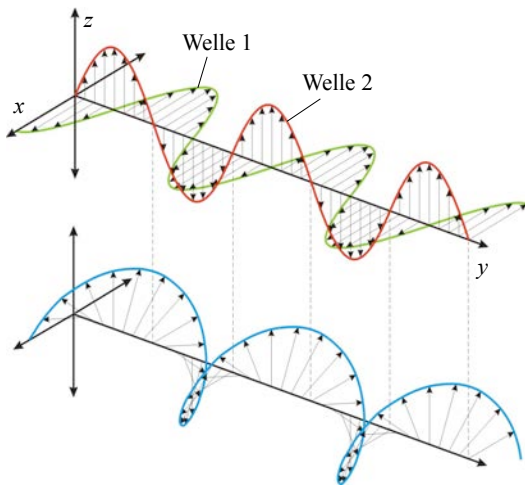


Abbildung 9.13: Zirkular polarisierte Welle.

Der elektrische Feldvektor an einer bestimmten Stelle rotiert somit um die z -Achse; als Funktion des Ortes erhält man eine schraubenförmige Ausbreitung von E - und H -Feld. Diese Lösungen werden als zirkulare Polarisationen bezeichnet, wobei die beiden Vorzeichen einer links-, resp. rechts zirkularen Polarisation entsprechen.

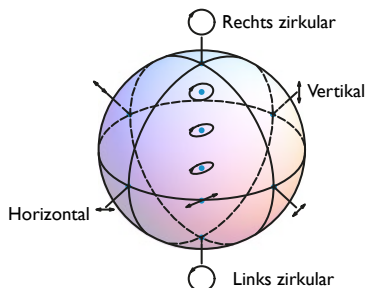


Abbildung 9.14: Unterschiedliche Polarisationszustände auf der Poincaré Kugel.

Die unterschiedlichen Polarisationszustände können in übersichtlicher Form mit Hilfe der Poincaré Kugel zusammengefasst werden.

9.1.8 Lichttechnische Größen

Die Intensität des Lichtes ist proportional zum Poyntingvektor, resp. zur Energiestromdichte des Feldes. Bisher haben wir diese nur für Wellen im Vakuum diskutiert. In einem dielektrischen Medium mit Brechungsindex $n = \sqrt{\epsilon_r}$ ist die Energiedichte

$$w_{el} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{2} E^2.$$

Die Energiestromdichte erhalten wir durch Multiplikation mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c/n zu

$$\begin{aligned} I &= |S| = \frac{c}{n} \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{2} E^2 = \frac{c \sqrt{\epsilon_r \epsilon_0}}{2} E^2 \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\mu_0}} E^2 = \frac{n}{2z_0} E^2. \end{aligned}$$

Zur Erinnerung:

$$z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \mu_0 c = 376,73 \Omega$$

ist die Wellenimpedanz für elektromagnetische Wellen im Vakuum.

Wird Licht (= elektromagnetische Strahlung) gemessen, so benutzt man je nach Fragestellung und Hintergrund unterschiedliche Größen. Physikalisch kann man eine optische Leistung in Watt messen. Bezieht man die Leistung auf eine Fläche, so erhält man die Bestrahlungsstärke in W/m^2 , bezieht man sie auf einen Raumwinkel so erhält man die Strahlungsstärke in $W/srad$. Die Emissionsdichte wird auch als Strahldichte bezeichnet.

Neben diesen physikalischen Größen und den entsprechenden Einheiten verwendet man auch physiologische Größen und Einheiten. Diese berücksichtigen, dass unsere Wahrnehmung von der Wellenlänge der Strahlung abhängt: So erscheint z.B. grünes Licht rund zehnmal heller als rotes Licht der gleichen Intensität.

physikalische Größe	physikalische Einheit	physiologische Größe	physiologische Einheit
Strahlungsleistung	W	Lichtstrom	Lumen (lm)
Strahlungsstärke	W/srad	Lichtstärke	lm/srad = Candela (cd)
Bestrahlungsstärke	W/m ²	Beleuchtungsstärke	lm/m ² = Lux
Emissionsdichte	W/srad m ²	Leuchtdichte	cd/m ²

Tabelle 9.2: Lichttechnische Größen: Vergleich von physikalischen und physiologischen Größen.

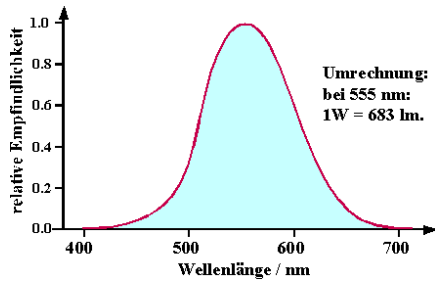


Abbildung 9.15: Relative spektrale Empfindlichkeit für physiologische lichttechnische Größen.

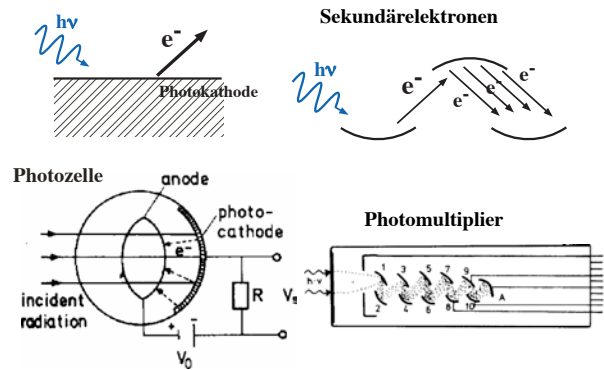


Abbildung 9.16: Nachweis über den Photoeffekt.

Tabelle 9.2 vergleicht die physiologischen Größen mit den entsprechenden physikalischen Größen. Den Lichtstrom Φ bekommt man aus einer gegebenen Strahlungsleistung Φ_e durch eine Faltung mit der Wellenlängenabhängigkeit des Auges, $V(\lambda)$:

$$\Phi = V(\lambda_0) \int_{380\text{nm}}^{780\text{nm}} d\lambda \frac{\partial \Phi_e}{\partial \lambda} V(\lambda)$$

Die Konstante $V(\lambda_0)$ beträgt für das Maximum der spektralen Empfindlichkeit (bei $\lambda_0 = 555\text{nm}$) für das Tagessehen $V(\lambda_0) = 683 \frac{\text{lm}}{\text{W}}$. Ein Lichtstrom von 1 lm entspricht bei einer Wellenlänge von 555 nm also einer Strahlungsleistung von $\frac{1}{683} \text{W}$.

9.1.9 Messung

Nachweis von Licht heißt in den meisten Fällen, das Licht in einen elektrischen Strom umzuwandeln. Dies gilt sowohl für künstliche Sensoren, wie auch für das Auge.

Die Umwandlung in elektrischen Strom kann auf unterschiedliche Weise geschehen. Die ältesten Detektoren dieser Art basieren auf dem Photoeffekt:

Licht, das auf eine Metalloberfläche auftrifft, kann aus dieser Elektronen herauslösen, sofern die Photonenenergie höher ist als die Austrittsarbeit. In einem Photomultiplier werden diese Elektronen anschließend mit Hilfe einer Beschleunigungsspannung und weiteren Elektroden vervielfacht und nachgewiesen.

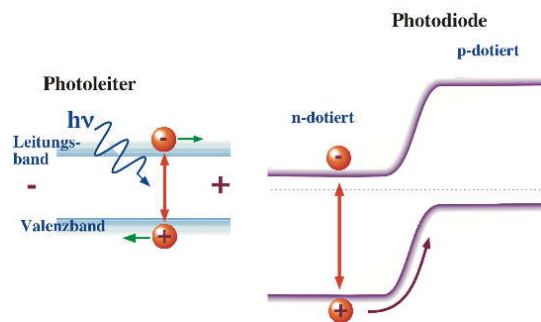


Abbildung 9.17: Halbleiterdetektoren.

Halbleitermaterialien zeigen einen ‘internen Photoeffekt’: Bei der Absorption von Licht in Halbleitermaterialien werden Elektronen aus dem Valenzband ins Leitungsband angeregt, sofern die Photonenenergie oberhalb der Bandlücke liegt. Die freien Ladungsträger können anschliessend nachgewie-

sen werden. Beim Photoleiter werden sie durch eine externe Spannung abgeleitet, bei einer Solarzelle oder einer Photodiode werden sie durch eine Grenzschicht zwischen unterschiedlich dotierten Bereichen, also unterschiedlichen Fermi-Energien, getrennt. Ähnliche Prozesse werden auch in CCD-Chips verwendet, die in den meisten Kameras verwendet werden.

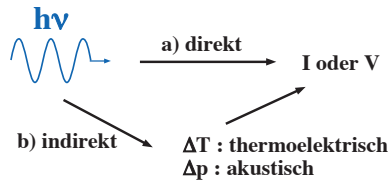


Abbildung 9.18: Thermoelektrischer Nachweis von Licht.

Ein anderes Prinzip verwenden thermische Sensoren: hier wird das Licht in Wärme umgewandelt und diese detektiert. Dieses Prinzip benutzt man z.B. wenn man die Sonne auf der Haut spürt. Physikalische Detektoren, die auf diesem Prinzip basieren sind

- Thermoelemente
- Bolometer: Widerstandsänderung in einem Metall
- Thermistoren: Widerstandsänderung in einem Halbleiter
- Pyroelektrische Detektoren: Die Temperaturerhöhung ändert eine Oberflächenladung

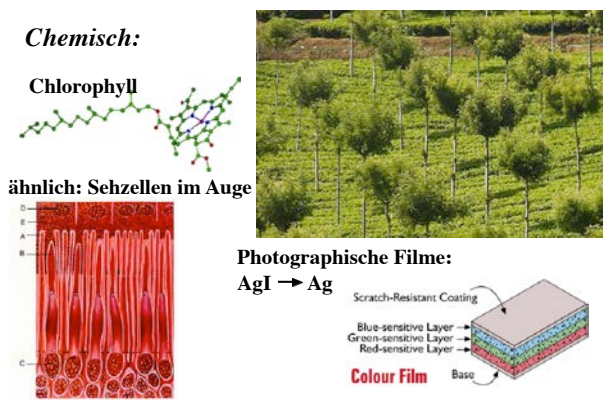


Abbildung 9.19: Chemischer Nachweis von Licht.

Besonders wichtig sind auch chemische Sensoren: Hier regt das Licht ein Elektron in einem Molekül in einen höher angeregten Zustand an. Das angeregte Elektron kann anschliessend für chemische Reaktionen verwendet werden. Dieses Prinzip wird insbesondere in der Natur benutzt, z.B. durch die Sinneszellen im menschlichen Auge, aber auch durch das Chlorophyll in Pflanzen etc. Dazu gehörte auch die analoge Photographie.

9.2 Geometrische Optik

Die geometrische Optik beschreibt die Ausbreitung von Licht mit Hilfe von Strahlen, welche sich in einem homogenen Medium geradlinig ausbreiten. Dies ist eine sinnvolle Annahme so lange die Dimensionen des optischen Apparates wesentlich größer sind als die optische Wellenlänge. Wichtige Abweichungen sind Interferenz (Kapitel 9.3) und Beugung (9.4).

9.2.1 Das Prinzip von Fermat

Bei der Berechnung des Weges, welchen das Licht in einem optischen Instrument nimmt, leistet das Prinzip von Fermat nützliche Dienste. Es ist ein Extremalprinzip, welches praktisch identisch ist mit dem Hamilton'schen Prinzip. Die Grundidee stammt von Hero von Alexandria aus dem 2. Jhd v. Chr. Es lautete: Das Licht nimmt den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten.

Fermat hat es erweitert auf Systeme mit mehr als einem Brechungsindex. In der Formulierung von Fermat lautet es: "Licht nimmt den Weg, für den es die kürzeste Zeit braucht". Mathematisch ausgedrückt lautet dies

$$\int_{p_0}^{p_1} n ds = \int_{p_0}^{p_1} \frac{c}{v_p} ds = c \int_{p_0}^{p_1} dt = \text{Minimum},$$

wobei P_0, P_1 die Anfangs- und Endpunkt des Weges bezeichnen und das Minimum sich auf alle möglichen Wege bezieht. Heute schreibt man diese Bedingung meist als Extremalprinzip. In der Form einer

Variation lautet es

$$\delta \int_{p_0}^{p_1} n ds = 0,$$

ähnlich wie das Hamilton'sche Prinzip. Das einfachste Beispiel ist natürlich die Ausbreitung im freien Raum in einem homogenen Medium. Hier ist offenbar der direkteste Weg der kürzeste.

9.2.2 Anwendungsbeispiele

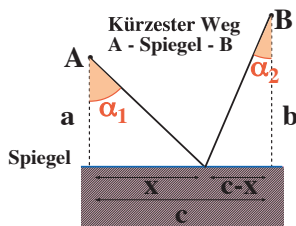


Abbildung 9.20: Reflexion als extremaler Weg.

Als weiteres Beispiel betrachten wir Licht, das auf einem Spiegel reflektiert wird. Wir suchen also den kürzesten Weg, auf dem das Licht vom Punkt A über den Spiegel zu Punkt B gelangt. Aus dem obigen Resultat entnehmen wir, dass es geradlinig von A zur Oberfläche und von dort geradlinig zu B läuft. Zu bestimmen sind die Winkel α_1 und α_2 . Die Länge des gesamten Weges beträgt

$$\Delta = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c-x)^2}.$$

Dieser Weg wird minimal für

$$\frac{d\Delta}{dx} = 0 = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}.$$

Die beiden Brüche können geschrieben werden als $\sin \alpha_1$ und $\sin \alpha_2$. Wir erhalten also das Reflexionsgesetz $\alpha_1 = \alpha_2$.

Wir können dieses Problem auf das Problem im freien Raum zurückführen indem wir (geometrisch) den Ausgangspunkt und den Weg bis zum Spiegel in diesem reflektieren. Damit ist wiederum die direkte Verbindung die kürzeste, und man sieht leicht, dass

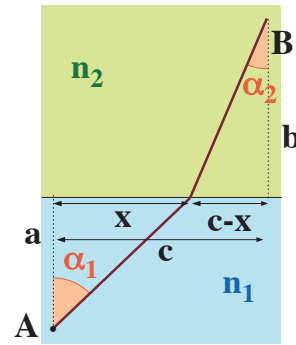


Abbildung 9.21: Extremaler Weg an einer Grenzfläche.

in diesem Fall der Reflexionswinkel gleich dem Einfallswinkel wird, d.h. wir haben mit Hilfe des Prinzips von Fermat das Reflexionsgesetz hergeleitet.

Wirklich wichtig wird das Prinzip erst, wenn das Medium nicht mehr homogen ist, z.B. wenn wir zwei Halbräume mit unterschiedlichen Brechungsindizes betrachten. Hier erreicht das Licht offenbar das Ziel dann am schnellsten, wenn der Weg im langsameren Medium gering gehalten wird. Der optische Weg beträgt jetzt

$$\Delta = n_1 \sqrt{a^2 + x^2} + n_2 \sqrt{b^2 + (c-x)^2}.$$

Der Extremalwert wird erreicht für

$$\frac{d\Delta}{dx} = 0 = n_1 \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - n_2 \frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}.$$

Das Resultat für das Minimum ist

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2,$$

also das Snellius'sche Brechungsgesetz.

Als weiteres Beispiel betrachten wir den Weg durch eine planparallele Platte. Da sich Licht im Glas langsamer ausbreitet als außerhalb, wird der Weg in der Platte verkürzt. Das Resultat ist, dass der Lichtstrahl einen seitlichen Versatz erfährt.

Wenn der Brechungsindex kontinuierlich variiert, so kann der optische Weg auch krumm sein. Qualitativ kann man diesen Effekt leicht durch das Prinzip von Fermat verstehen: der Lichtstrahl bleibt möglichst

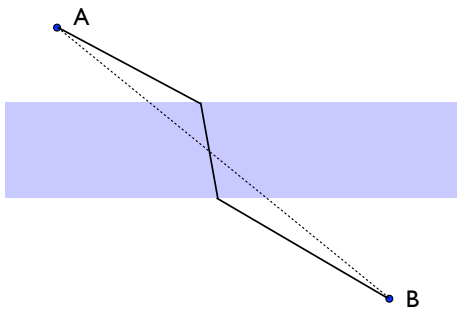


Abbildung 9.22: Durchqueren eines Flusses oder einer planparallelen Platte.

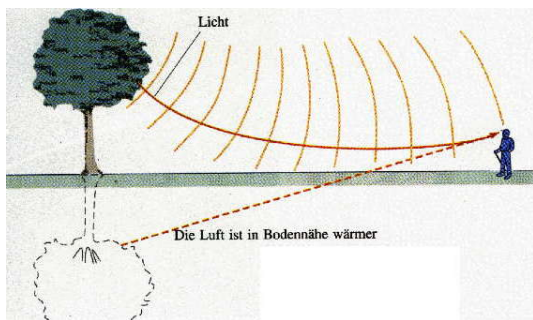


Abbildung 9.23: Luftspiegelung über einer Straße.

lange im Medium mit dem niedrigen Brechungsindex. Eine quantitative Analyse lässt sich leichter im Wellenbild durchführen; hier, im Kapitel über geometrische Optik verzichten wir deshalb auf eine genauere Behandlung.

Ein Beispiel dieses Effektes ist z.B., dass die Strahlen der Sonne in der Erdatmosphäre gekrümmt werden. Deshalb ist die Sonne auch noch sichtbar, wenn sie rein geometrisch betrachtet bereits unterhalb des Horizontes ist.

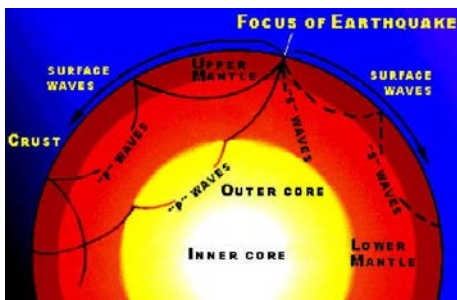


Abbildung 9.24: Ausbreitung seismischer Wellen.

Den gleichen Effekt findet man z.B. auch bei der Ausbreitung von seismischen Wellen: die Variation der Phasengeschwindigkeit mit Druck und Temperatur führt zu einer Abhängigkeit von der Tiefe und deshalb zu gebogenen Pfaden.

9.2.3 Brechung an einer sphärischen Oberfläche

Trifft ein Lichtstrahl auf eine gekrümmte Grenzfläche wie das menschliche Auge, so hängt seine Richtung nach der Grenzfläche davon ab, an welchem Punkt er auf die Grenzfläche auftrifft. Dies wird z.B. in Sammellinsen benutzt.

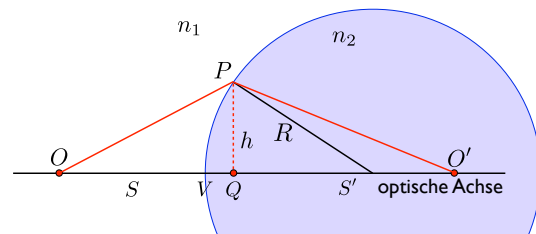


Abbildung 9.25: Brechung an einer sphärischen Oberfläche.

Wir betrachten zunächst den Fall einer einzelnen sphärischen Oberfläche, d.h. eines Glaskörpers, der nach rechts unendlich weit ausgedehnt ist. Wir berechnen den Weg, den ein Lichtstrahl nimmt, wenn er an der Oberfläche gebrochen wird, indem wir das Prinzip von Fermat verwenden. Natürlich könnten wir dafür auch das Brechungsgesetz verwenden und sollten dabei das gleiche Resultat erhalten.

Wir beschränken uns auf geringe Abstände von der optischen Achse, so dass wir die Oberfläche durch eine Parabel annähern können. Der optische Weg OPO' durch einen Punkt P im Abstand h von der optischen Achse ist dann

$$n_1 OP + n_2 PO'. \tag{9.2}$$

Wir können die geometrische Länge der beiden Strecken in quadratischer Näherung schreiben als

$$OP \approx OQ + \frac{h^2}{2g} \quad O'P \approx O'Q + \frac{h^2}{2b}.$$

Hier ist g die Distanz vom Objekt O zur Grenzfläche und b die Distanz von der Grenzfläche zum Bild O' . Die Summe (9.2) wird damit

$$n_1 OP + n_2 PO' = n_1 \left(OV + VQ + \frac{h^2}{2g} \right) + n_2 \left(QO' + \frac{h^2}{2b} \right).$$

Gemäß dem Prinzip von Fermat sollte dies gleich dem direkten Weg sein, also

$$n_1 \left(OV + VQ + \frac{h^2}{2g} \right) + n_2 \left(QO' + \frac{h^2}{2b} \right) = n_1 OV + n_2 (VQ + QO').$$

Somit muss gelten

$$VQ(n_1 - n_2) + \frac{h^2}{2g} n_1 + \frac{h^2}{2b} n_2 = 0.$$

In der gewählten Näherung ist

$$VQ = \frac{h^2}{2R}$$

und somit

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{R}, \tag{9.3}$$

also unabhängig von h . Falls diese Bedingung erfüllt ist, benötigt das Licht somit auf allen Pfaden die gleiche Zeit. Nach dem Prinzip von Fermat wird damit O auf O' abgebildet.

9.2.4 Abbildungen

Gleichung (9.3) wird als Abbildungsgleichung bezeichnet: Bei gegebenem Radius R , Brechungsindex $n_{1,2}$ und Objektdistanz g bestimmt sie die Bildidistanz b . Die rechte Seite der Gleichung stellt die Brechkraft der Oberfläche dar, welche durch die Differenz der Brechungsindizes und den inversen Krümmungsradius gegeben ist. Die Brechkraft $\frac{\Delta n}{R}$ wird in der Einheit Dioptrien (m^{-1}) gemessen.

Einen wichtigen Spezialfall erhält man, wenn man die Objektdistanz g gegen unendlich gehen lässt,

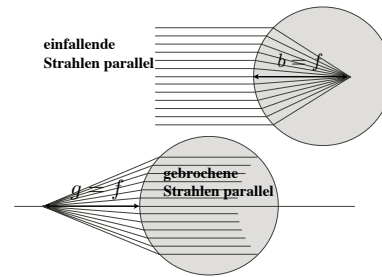


Abbildung 9.26: Brechung von parallelen Strahlen.

wenn also parallele Strahlen auf die Grenzfläche einfallen. Die Objektdistanz b wird dann als Brennweite f bezeichnet. Offenbar ist

$$\frac{n_2}{f} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

oder

$$f = R \frac{n_2}{n_2 - n_1}.$$

Die Sammelwirkung einer gekrümmten Oberfläche ist somit bestimmt durch den Krümmungsradius und die Differenz zwischen den Brechungsindizes.

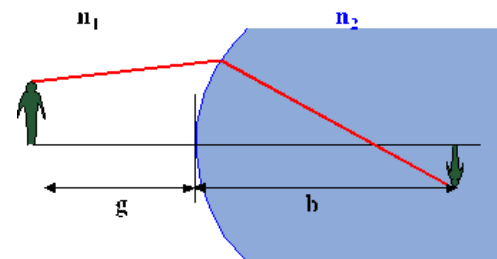


Abbildung 9.27: Brechung an einer sphärischen Oberfläche.

Wird anstelle eines einzelnen Punktes ein Objekt durch Brechung an einer sphärischen Grenzfläche abgebildet, so entsteht das Bild im Abstand b von der Grenzfläche, wobei es invertiert wird. Dies entspricht grob der Situation im menschlichen Auge (siehe 9.5).

9.2.5 Linsen

Anstelle einer einzelnen sphärisch gekrümmten Oberfläche betrachten wir nun einen Glaskörper mit

zwei sphärisch gekrümmten Oberflächen. Dies entspricht offenbar einer Linse, wobei der Krümmungsradius von beiden Oberflächen positiv, negativ oder unendlich sein kann.

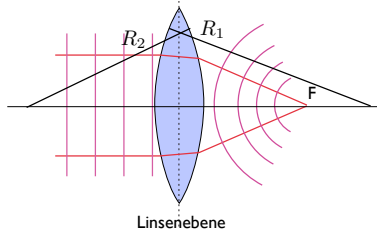


Abbildung 9.28: Sphärische Linse.

Den Strahlengang für eine Linse finden wir, indem wir das Resultat (9.3) für eine sphärische Oberfläche zweimal anwenden. Wir vereinfachen dabei für den Fall $n_1 = 1, n_2 = n$. Zunächst für die erste Grenzfläche gilt

$$\frac{1}{g} + \frac{n}{S'} = \frac{n-1}{R_1}.$$

Die Distanz S' bis zum Bild muss gleichzeitig die Gleichung für die zweite Oberfläche

$$-\frac{n}{S'} + \frac{1}{b} = -\frac{n-1}{R_2}.$$

Dabei muss das Vorzeichen von g und R beachtet werden: es hängt von der Richtung ab. Bei der Objekt- / Bilddistanz ist es gemäß unserer Definition positiv, wenn das Objekt / Bild rechts der Grenzfläche liegt, negativ wenn es auf der linken Seite liegt. Beim Krümmungsradius entsprechend positiv wenn das Zentrum auf der rechten Seite liegt, negativ im umgekehrten Fall.

Wir reduzieren die beiden Gleichungen auf eine, indem wir S' eliminieren, und erhalten

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{f}.$$

Somit ist die Brennweite der Linse gegeben durch

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

Linsenform						
Bezeichnung	bi-konvex	plan-konvex	positiver Meniskus	bi-konkav	plan-konkav	negativer Meniskus
Radien	$R_1 > 0$ $R_2 < 0$	$R_1 = \infty$ $R_2 < 0$	$R_1 < R_2 < 0$	$R_1 < 0$ $R_2 > 0$	$R_1 = \infty$ $R_2 > 0$	$R_2 < R_1 < 0$
Brennweite	$f > 0$			$f < 0$		

Abbildung 9.29: Linsenformen.

wobei die Radien $R_{1,2}$ der beiden Linsenflächen jeweils vorzeichenbehaftet sind. Man kann dieses Resultat einfach so interpretieren, dass sich die Brechkraft $(n-1)/R$ der beiden Oberflächen addiert, wobei bei der zweiten Oberfläche aufgrund des umgekehrten Verhältnisses der Brechungsindizes ein positiver Radius eine negative Sammelwirkung, d.h. eine aufweitende Wirkung hat.

Die "Brechkraft" oder Sammelwirkung einer Linse ist das Inverse der Brennweite und wird z.T. in "Dioptrien" = $1/m$ gemessen. 5 Dioptrien bezeichnen eine Brennweite von 20 cm. Die Brechkraft ist somit proportional zur Differenz der Brechungsindizes und invers proportional zum Radius der Linse. Die Tatsache, dass die Brechkraft von der Differenz der Brechungsindizes abhängt, kann man sehr einfach nachprüfen wenn man beim Schwimmen unter Wasser die Augen öffnet: Man sieht nicht scharf, da hier die Brechkraft der Linse im Auge kleiner ist.

Je nach Vorzeichen und Betrag der beiden Radien unterscheiden man plankonvexe, plankonkave, Meniskus- und .. Linsen.

9.2.6 Abbildung und Vergrößerung

Das Bild eines bestimmten Objekts, das durch eine dünne Linse erzeugt wird, kann durch eine einfache Konstruktion erhalten werden. Dazu benötigen wir, neben der Linse, die beiden Brennpunkte im Abstand f .

Für die Berechnung des Bildes benutzt man die folgenden Regeln:

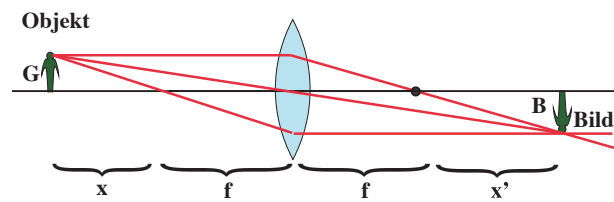


Abbildung 9.30: Abbildung an einer Linse.

- Jeder Strahl parallel zur Achse geht durch den Fokus auf der gegenüberliegenden Seite
- Ein Strahl, der durch den Fokus läuft, tritt auf der anderen Seite parallel zur Achse aus.

Damit erhalten wir folgende Gleichung

$$\frac{y'}{f} = \frac{y}{x} \tag{9.4}$$

und

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y}{f} \tag{9.5}$$

und für die Grösse y' des Bildes relativ zur Grösse y des Objekts

$$\frac{y'}{y} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f}$$

Das Vergrößerungsverhältnis ist somit gegeben durch das Verhältnis der Brennweite f zum Abstand x des Objekts vom Brennpunkt, resp. durch das Verhältnis des Abstandes x' des Bildes vom zweiten Brennpunkt.

Den Bildabstand x' erhält man aus den beiden obigen Gleichungen z.B. indem man (9.4) auflöst nach

$$y' = y \frac{f}{x}$$

und dies in (9.5) einsetzt:

$$\frac{y f}{x x'} = \frac{y}{f}$$

oder

$$x x' = f^2.$$

Das Produkt von Objekt- und Bilddistanz (gemessen vom Brennpunkt) ist somit immer gleich dem Quadrat der Brennweite. Diese Form ist äquivalent zur Gleichung

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

wenn die Distanzen durch

$$g = x + f \quad b = x' + f$$

ersetzt werden.

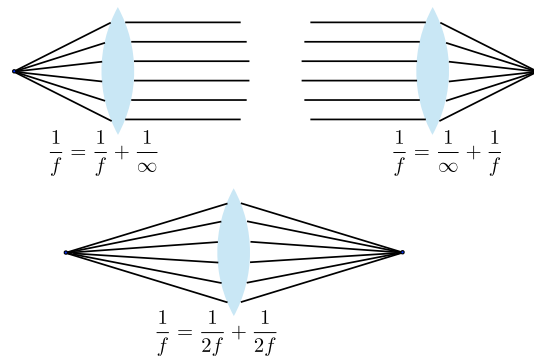


Abbildung 9.31: Spezielle Abstände.

Die wichtigsten Spezialfälle sind $x = x' = f$, d.h. Objekt und Bild sind je um f von den Brennpunkten entfernt, resp. um $2f$ von der Linse. Dabei sind Objekt- und Bilddistanz identisch und das Abbildungsverhältnis gerade gleich 1. Wenn wir einen der beiden Abstände, z.B. x , gegen Null gehen lassen, so muss der andere gegen unendlich gehen. Dies entspricht den beiden Fällen wo ein paralleler Strahl in den Brennpunkt der Linse fokussiert wird, resp. wo eine punktförmige Quelle im Brennpunkt der Linse kollimiert wird.

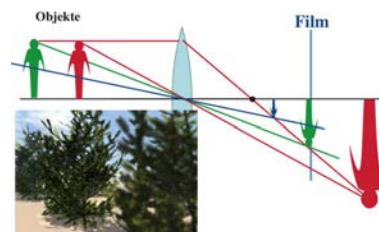


Abbildung 9.32: Tiefenschärfe.

Die Tatsache, dass unterschiedlich entfernte Gegenstände auf unterschiedliche Bildebenen abgebildet

werden ist jedem Hobby-Fotografen bekannt. Sie führt zur endlichen "Tiefenschärfe" eines Bildes: Da der Film einen bestimmten Abstand zum Objektiv aufweist werden nur Gegenstände in der "richtigen" Entfernung scharf abgebildet.

9.2.7 Linsenfehler

Bisher sind wir davon ausgegangen, dass die Linsen perfekt seien. Allerdings haben wir bei der Herleitung der Linsengleichung verschiedene vereinfachende Annahmen gemacht, die in der Praxis nie exakt erfüllt sind. So hatten wir z.B. angenommen dass die Dicke der Linsen vernachlässigt werden kann, oder dass die Oberfläche durch eine Parabel angenähert werden kann. In der Praxis benutzt man hingegen sphärische Oberflächen, da solche Linsen sehr viel einfacher herzustellen sind. Aus diesen Unterschieden ergeben sich sogenannte "Linsenfehler", d.h. Unterschiede zwischen den hier angenommenen "Gesetzen" und den wirklichen Strahlengängen. Technisch werden diese folgendermaßen klassifiziert:

Sphärische Aberration Die hier benutzten Gleichungen gelten nur für Strahlen in der Nähe der optischen Achse. Strahlen, die zu weit davon entfernt sind, werden nicht mehr in den gleichen Punkt fokussiert.

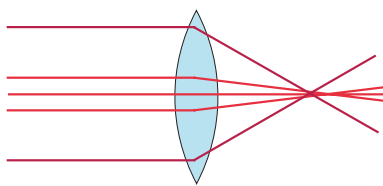


Abbildung 9.33: Sphärische Aberration einer Linse.

Natürlich kann man eine Linse immer klein genug machen, dass solche Fehler vernachlässigbar sind. Andererseits ist die Lichtstärke einer Linse proportional zu ihrer Fläche, also zum Quadrat des Durchmessers. Es gibt zwei Möglichkeiten, sphärische Aberration auch bei großen Linsen gering zu halten:

i) Man kombiniert verschiedene Linsen in ein Objektiv

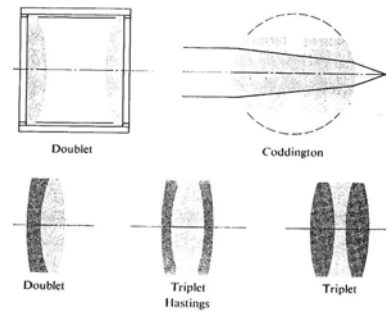


Abbildung 9.34: Kombination von Linsen.

ii) Man benutzt asphärische Linsen, d.h. man optimiert die Form der Linse so, dass diese Fehler verschwinden. Dies wird allerdings nur für teure Spezialoptiken gemacht, weil das Herstellungsverfahren wesentlich aufwendiger ist. Heute ist dies aber eindeutig ein zunehmender Trend.

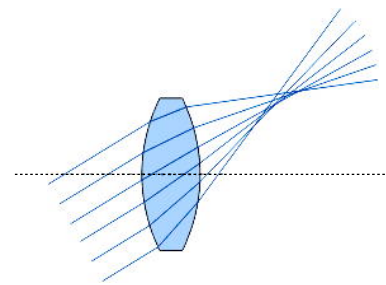


Abbildung 9.35: Koma.

Ein Abbildungsfehler, welcher eng mit der sphärischen Aberration verwandt ist, ist die Koma. Parallele Strahlen, welche unter einem Winkel zur optischen Achse einfallen, werden nicht in einen Punkt abgebildet, sondern in eine Art Schweif. Dieser Effekt kann ähnlich wie die sphärische Aberration korrigiert werden.

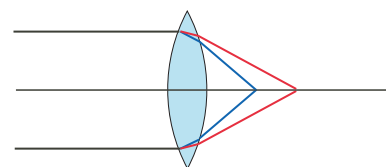


Abbildung 9.36: Chromatische Aberration.

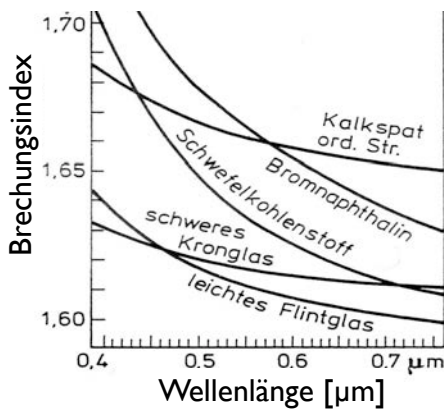


Abbildung 9.37: Dispersion unterschiedlicher Glas-sorten.

Chromatische Aberration: Aufgrund der Dispersion des Glases werden unterschiedliche Wellenlängen unterschiedlich stark gebrochen. Auch dieses Problem kann durch die Kombination unterschiedlicher Linsen weitgehend vermieden werden.

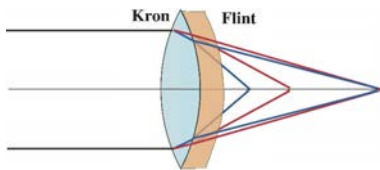


Abbildung 9.38: Korrektur der chromatischen Aberration.

Dabei werden Linsen mit unterschiedlichem Brechungsindex verwendet.

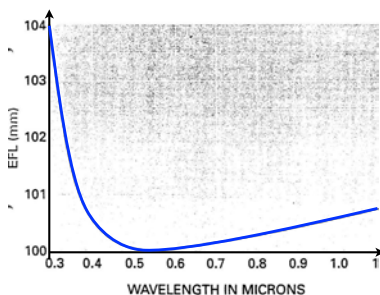


Abbildung 9.39: Dispersionskurve eines nominellen Achromaten.

Solche Linsenkombinationen werden kommerziell als "Achromaten" angeboten. Das hier gezeigte Bei-

spiel reduziert die Dispersion über den sichtbaren Spektralbereich auf weniger als 0.5%.

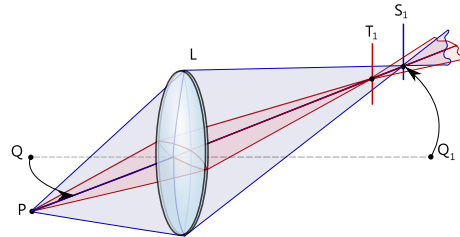


Abbildung 9.40: Astigmatismus.

Astigmatismus Ist die Linse nicht symmetrisch um ihre Achse, so erhält man für unterschiedliche Ebenen unterschiedliche Brennweiten. Dieser Effekt wird als Astigmatismus bezeichnet. Er führt dazu, dass man kein scharfes Bild erhält.



Abbildung 9.41: Effekt des Astigmatismus in unterschiedlichen Bildebenen.

Man kann als Bildebene die Brennebene für Strahlen in der horizontalen oder vertikalen Ebene wählen, und erhält dann jeweils eine Verschmierung in der anderen Richtung.

9.2.8 Maximale Auflösung

Die Gleichungen von Kapitel 9.2.6 implizieren, dass man Objekte beliebig vergrößern kann. Dies ist aber nicht möglich, da man dann in einen Bereich kommen würde, wo die geometrische Optik nicht mehr gültig wäre. Wir hatten als Voraussetzung für deren Anwendbarkeit ja angenommen, dass die relevanten Dimensionen groß seien im Vergleich zur Wellen-

länge des Lichtes. Dies ist bei kleinen Objekte nicht mehr der Fall.

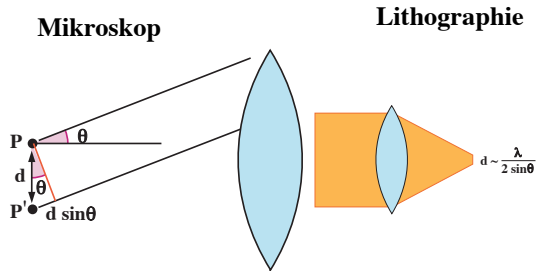


Abbildung 9.42: Grenze der Auflösung.

Eine Abschätzung für das maximal erreichbare Auflösungsvermögen erhält man, wenn man die endliche Wellenlänge mit berücksichtigt. Damit zwei Punkte P und P' im Abstand D unterschieden werden können, muss die Weglängendifferenz des Lichtes bei der Linse mindestens λ sein. Damit wird

$$2nD \sin \theta \geq \lambda.$$

Für eine unendlich große Linse und sichtbares Licht würde man somit erhalten

$$2 \cdot 1.5 D \geq 0.6 \mu\text{m}$$

oder $D \geq 0.2 \mu\text{m}$. Man fasst dies auch gerne als Abbé-Kriterium zusammen: der minimale Abstand von zwei unterscheidbaren Punkten ist

$$d_{min} = 0,61 \frac{\lambda}{n \sin \alpha},$$

mit α als halber Öffnungswinkel der Linse.

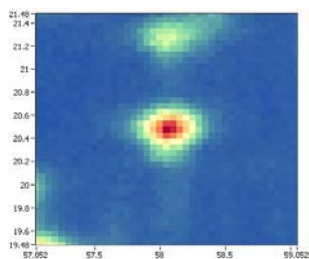


Abbildung 9.43: Optisches Bild einer Punktquelle: einzelnes NV-Zentrum in Diamant.

Diese Beziehung kann man z.B. verifizieren, indem man eine optische Punktquelle, wie z.B. ein einzelnes Atom, abbildet.

Die gleiche Beziehung gilt nicht nur bei der mikroskopischen Abbildung, sondern auch umgekehrt beim Schreiben von kleinen Strukturen mit optischen Instrumenten, also z.B. in der Lithographie.

9.2.9 Lupe und Mikroskop

Lupe

Die Lupe kann als zusätzliche Linse vors Auge gehalten werden, so dass man Gegenstände betrachten kann, die sich näher beim Auge befinden. Die Vergrößerung wird somit primär durch die Verringerung des Objektabstandes erreicht. Mit bloßem Auge kann man typischerweise bis auf eine Distanz von ca. 25 cm scharf sehen, mit einer Linse je nach Brennweite bis auf etwa 1 cm. Der Vergrößerungsfaktor ist gegeben als das Verhältnis der Längen, wie sie auf der Netzhaut erscheinen, und damit über das Verhältnis der Sehwinkel.

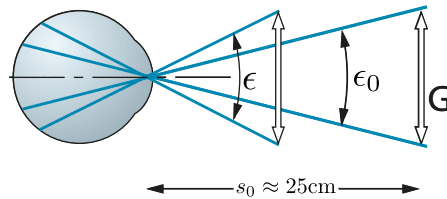


Abbildung 9.44: Definition des Vergrößerungsfaktors.

Der Vergrößerungsfaktor ist somit

$$s = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}.$$

Eine Lupe der Brennweite f erlaubt einem, den Abstand zum Gegenstand bis auf f zu reduzieren, anstelle des sonst möglichen minimalen Sehabstandes $s_0 \approx 25 \text{ cm}$. Damit vergrößert sie den Sehwinkel um den Faktor

$$s = \frac{s_0}{f}.$$

Mikroskop

Das Mikroskop besteht aus einer Kombination von 2 Linsen. Die erste Linse, das Objektiv, erzeugt ein

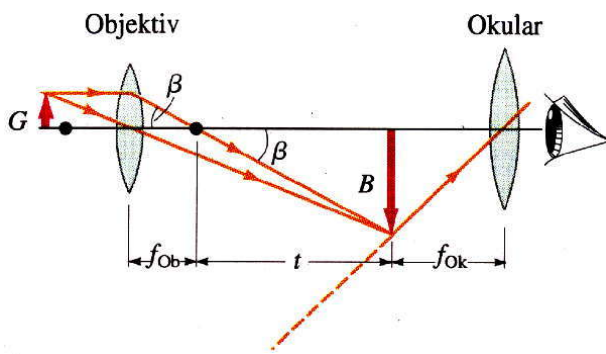


Abbildung 9.45: Mikroskop.

Zwischenbild, welches grösser ist als das Objekt. Für die Berechnung des Vergrößerungsfaktors machen wir die Näherung, dass die Tubuslänge t groß sei im Vergleich zur Brennweite f_{Obj} des Objektivs. Dann wird der Vergrößerungsfaktor

$$v_{ZB} = \frac{t}{f_{Obj}}$$

Eine zusätzliche Vergrößerung dieses Zwischenbildes erreicht man, indem man es nicht mit dem nackten Auge betrachtet, sondern mit einem Okular und damit wie bei einer Lupe einen geringeren Objektstand erreicht. Dadurch wird eine weitere Vergrößerung um den Faktor

$$v_O = \frac{s_O}{f_{Ok}}$$

erreicht. Die gesamte Vergrößerung des Mikroskops ist damit

$$v_{Mic} = v_{ZB} v_O = \frac{t s_O}{f_{Obj} f_{Ok}}$$

9.2.10 Optische Fasern

Optische Fasern leiten Licht in einer dünnen Faser aus Glas. Sie werden in der Medizin unter anderem bei Laser-Operationen oder für endoskopische Untersuchungen benutzt. Sie verwenden Totalreflexion, um das Licht entlang der Faser zu führen. Betrachtet man das System mit Hilfe klassischer Strahlenoptik, so fallen die Strahlen unter einem Winkel auf die Oberfläche der Faser ein, welche größer ist als

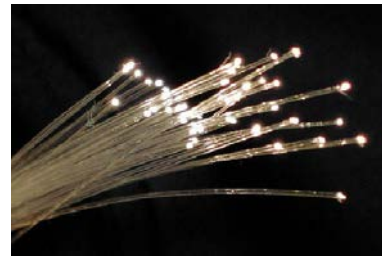


Abbildung 9.46: Optische Lichtwellenleiter.

der Winkel für die Totalreflexion. Für eine einfache Glasfaser würde dieser etwa

$$\sin^{-1} \frac{1}{n_{Gl}} \approx \sin^{-1} \frac{1}{1,5} \approx 41,8^\circ.$$

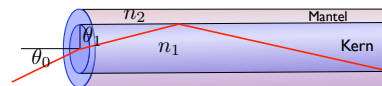


Abbildung 9.47: Strahlverlauf in Kern-Mantel Faser.

Allerdings verwendet man dafür nicht einfache Glasfasern, da in diesem Fall die evaneszente Welle außerhalb der Glasfaser gestreut werden könnte, sondern Kern-Mantel Fasern, bei denen die evaneszente Welle im Mantel läuft, der noch weitgehend verlustfrei ist. Hier ist der Unterschied der Brechungsindizes (Glas des Kerns gegen Glas des Mantels) wesentlich geringer als Glas gegen Luft und damit der Grenzwinkel größer. Man quantifiziert dies zum Beispiel über die numerische Apertur NA , also den maximalen Winkel, unter dem man einkoppeln kann, so dass der Strahl noch geführt wird:

$$NA = \sin \theta_0 = n_1 \sin \theta_1 = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}.$$

Eine genauere Behandlung der Lichtleitung verwendet eine wellenoptische Beschreibung. Diese erfolgt analog zur Beschreibung von elektromagnetischen Moden in Wellenleitern und ergibt vor allem den wichtigen Unterschied zwischen Einzelmoden- und Multimoden Fasern.

9.3 Interferenz

Meist hat man nicht nur eine einzelne Welle, sondern mehrere Wellen mit gleichen oder unterschiedlichen

Frequenzen, Phasen, Amplituden und Ausbreitungsrichtungen. Bei ihrer Überlagerung spielt Interferenz zwischen einzelnen (Teil-)Wellen eine wichtige Rolle, sowohl bei optischen wie auch bei Ultraschall-Untersuchungen. Die hier diskutierten Grundlagen spielen deshalb auch im zweiten Teil der Vorlesung eine Rolle.

9.3.1 Grundlagen

Die Maxwell Gleichungen sind linear. Verschiedene Wellen beeinflussen sich deshalb nicht. Allerdings beobachtet man in den meisten Fällen nicht die Felder selbst, sondern die Intensität oder Leistung einer Welle. Diese sind proportional zum Quadrat des Feldes,

$$I \propto |E|^2.$$

Man bezeichnet sie deshalb als quadratische Detektoren. Praktisch alle Detektoren funktionieren nach diesem Prinzip, so z.B. auch das menschliche Auge, Halbleiterdetektoren oder fotografische Filme.

Die Maxwellgleichungen (oder die akustischen Wellengleichungen, siehe Kap. 8.1.2) beschreiben somit nicht direkt die gemessene Größe; für diese, also für die Intensität, ist die Physik nicht linear. Damit haben wir eine weitere Grenze der geometrischen Optik erreicht, welche davon ausgeht, dass einzelne Strahlen voneinander unabhängig sind.

Wenn zwei Felder A und B auf einen Detektor fallen, so misst dieser das Quadrat der Summe, d.h. das Signal ist proportional zu

$$I \propto (A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB.$$

Im Signal sehen wir somit nicht einfach die Summe der beiden Teilsignale ($= A^2 + B^2$), sondern es enthält einen zusätzlichen Term $2AB$, der als Interferenzterm bezeichnet wird.

Für komplexe Amplituden müssen wir zusätzlich die relative Phase der beiden Wellen berücksichtigen. Das Signal ist in diesem Fall proportional zum Absolutquadrat der Gesamtwelle, d.h.

$$\begin{aligned} I &\propto |A + B|^2 = (A + B)(A + B)^* \\ &= AA^* + AB^* + A^*B + BB^* \\ &= |A|^2 + |B|^2 + 2\Re\{AB^*\}. \end{aligned}$$

Der Interferenzterm kann auch geschrieben werden als

$$2\Re\{AB^*\} = 2|AB|\cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

wobei $\varphi_{1,2}$ die Phasen der einzelnen Wellen darstellen.

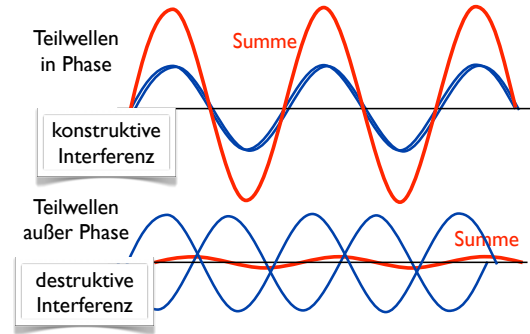


Abbildung 9.48: Amplitude der Summenwelle .

Die Interferenz wird somit maximal, wenn die beiden Phasen identisch sind. Man spricht dann von konstruktiver Interferenz. Unterscheiden sich die beiden Phasen um π , so wird der Signalbeitrag negativ und man spricht von destruktiver Interferenz. Die Interferenz verschwindet, wenn die beiden Wellen um $\pi/2$ ausser Phase sind.

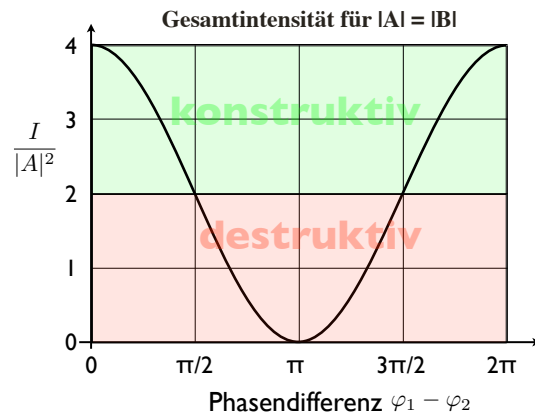


Abbildung 9.49: Intensität als Funktion der Phasendifferenz zwischen den beiden Wellen.

Für gleich starke Felder, $A = B$ wird die kombinierte Intensität als Funktion der Phasendifferenz

$$I = 2|A|^2(1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Neben der Phasenlage muss auch die Polarisation der beiden Felder übereinstimmen: Ist z.B. eines der Felder in x -, das andere in y -Richtung polarisiert, so entsteht keine Interferenz. Das gleiche gilt für unpolarisiertes Licht.

9.3.2 Interferenz von 2 ebenen Wellen

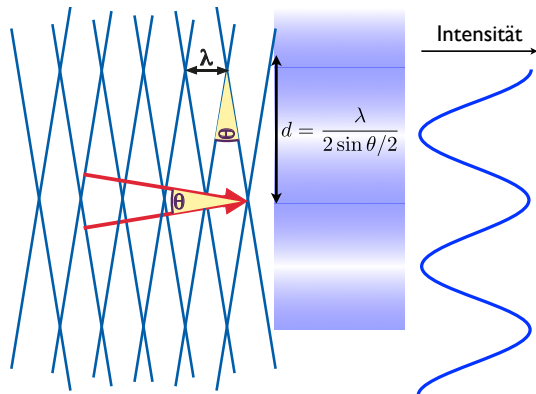


Abbildung 9.50: Interferenz von 2 ebenen Wellen.

Wir können solche Interferenzeffekte untersuchen, wenn wir zwei Laserstrahlen überlagern. Die beiden Strahlen können näherungsweise als ebene Wellen betrachtet werden. Genauer betrachten wir zwei ebene Wellen, die unter einem kleinen Winkel θ auf einen Schirm fallen.

Die beiden Felder verstärken sich gegenseitig, wenn sie in Phase sind und interferieren destruktiv, wenn sie außer Phase sind. Dies geschieht jeweils entlang einer Geraden senkrecht zum Schirm. Den Abstand zwischen zwei solchen Geraden findet man, indem man verlangt, dass die Phasendifferenz gerade 2π beträgt. In der Richtung senkrecht zum Schirm ist dieser Abstand eine Wellenlänge. Parallel zum Schirm entspricht er

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta/2} \approx \frac{\lambda}{\theta},$$

wobei die Näherung für kleine Winkel gilt, $\theta \ll 1$. Der Abstand wird also um so größer, je kleiner der Winkel wird. Für parallele Strahlen verschwindet die Ortsabhängigkeit, für gegenläufige Strahlen ($\theta = \pi$) erreicht der Abstand sein Minimum bei der halben Wellenlänge, $d_{min} = \lambda/2$.

9.3.3 Zweistrahlinterferenz an dünnen Schichten

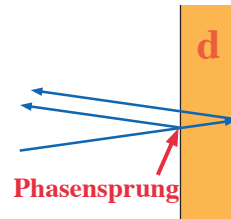


Abbildung 9.51: Zweistrahlinterferenz an einer dünnen Schicht.

Wenn Licht an einer planparallelen Platte reflektiert wird, so erhält man je einen Reflex von der Vorder- und der Rückseite. Diese beiden reflektierten Wellen stammen von der gleichen Welle und können deshalb interferieren. Die erste Welle erhält außerdem eine Phasenverschiebung um π , da sie am optisch dichteren Medium reflektiert wird. Für senkrechten Einfall beträgt die Phasendifferenz

$$\delta \varphi = \pi + 4\pi n \frac{d}{\lambda_0},$$

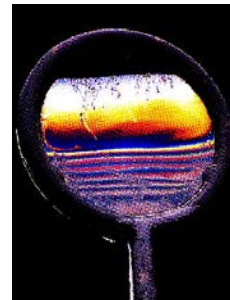


Abbildung 9.52: Interferenz an einer Seifenlamelle erzeugt farbige Streifen.

Ein gutes Beispiel für eine dünne Schicht ist eine Seifenlamelle. Da die Interferenzbedingung von der Wellenlänge abhängt, wird sie nicht für alle Farben des Spektrums gleichzeitig erfüllt. Außerdem ist die Dicke der Seifenhaut nicht überall gleich: Die Schwerkraft zieht die Lösung nach unten und führt deshalb zu einer Abfolge von Interferenzstreifen.

9.3.4 Entspiegelung

Man kann dies benutzen, um Reflexionen zu eliminieren, z.B. auf einem Brillenglas, einer Kameralinse oder der Optik in einem Laser. Wir betrachten als Beispiel eine Glasoberfläche mit Brechungsindex $n = 1.5$. Monochromatisches Licht der Wellenlänge λ_0 soll senkrecht auf diese Oberfläche auftreffen. Normalerweise erhält man von der Oberfläche eine Reflexion von etwa 4% des Lichtes.

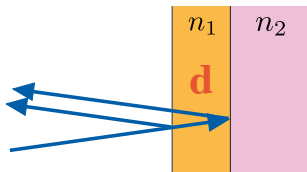


Abbildung 9.53: Zweistrahlinterferenz an einer dünnen Schicht.

Wir berechnen nun die resultierende Reflexion, wenn wir auf diese Oberfläche eine Schicht der Dicke d mit dem Brechungsindex n_1 aufbringen. Wir haben dann zwei Grenzflächen, eine zwischen Luft ($n_0 = 1$) und n_1 und die andere von n_1 nach n_2 . Die Reflektivität der ersten Grenzfläche ist, für näherungsweise senkrechten Einfall,

$$\frac{E^{(r_1)}}{E^{(i)}} = \frac{n_1 - 1}{n_1 + 1}.$$

Wir nehmen weiterhin an, dass die transmittierte Welle nicht wesentlich abgeschwächt ist, so dass die zweite reflektierte Teilwelle als

$$\frac{E^{(r_2)}}{E^{(i)}} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}.$$

geschrieben werden kann. Die zweite Teilwelle hat dabei eine zusätzliche optische Weglänge von $2n_1d$ und dadurch eine Phasenverzögerung um

$$\delta\varphi = 4\pi n_1 \frac{d}{\lambda_0},$$

wobei λ_0 die Vakuum-Wellenlänge darstellt.

Diese Summe der beiden Teilwellen ist

$$E^{(r_1)} + E^{(r_2)} = E^{(i)} \left(\frac{n_1 - 1}{n_1 + 1} + \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} e^{i\delta\varphi} \right).$$

Wir suchen jetzt eine Lösung, bei der destruktive Interferenz zwischen den beiden Teilwellen dazu führt, dass diese Summe verschwindet. Damit dies der Fall ist, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein:

1. Der zweite Term muss reell und negativ sein, d.h. der Phasenfaktor $e^{i\delta\varphi} = -1$ oder

$$\delta\varphi = \pi \quad \rightarrow \quad d = \frac{\lambda_0}{4n_1}.$$

Man spricht deshalb von einer $\lambda/4$ Beschichtung.

2. Der Betrag der beiden Terme muss gleich sein,

$$\frac{n_1 - 1}{n_1 + 1} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}.$$

Dies können wir schreiben als

$$\begin{aligned} (n_1 - 1)(n_2 + n_1) &= (n_1 + 1)(n_2 - n_1) \\ n_1 n_2 + n_1^2 - n_2 - n_1 &= n_1 n_2 - n_1^2 + n_2 - n_1 \\ n_1 &= \sqrt{n_2}. \end{aligned}$$

Die reflektierte Feldstärke verschwindet somit genau dann, wenn

$$n_1 = \sqrt{n_2} \quad \text{und} \quad d = \frac{\lambda_0}{4n_1}.$$

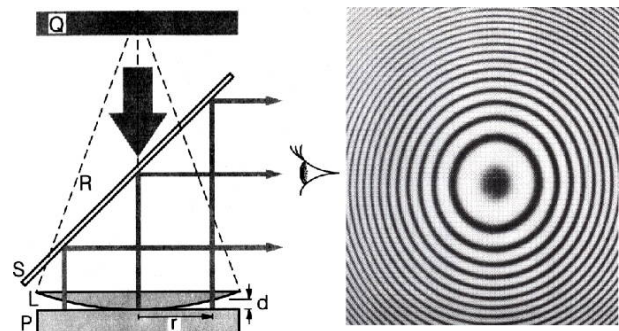


Abbildung 9.54: Newton'sche Ringe. Links ist das Messprinzip dargestellt, rechts ein Beispiel.

Eine andere Anwendung sind die so genannten Newton'schen Ringe: Sie ergeben sich durch Zweistrahlinterferenz wenn man eine Linse auf einen ebenen Spiegel legt und mit einer ebenen Welle durchstrahlt, welche vom Spiegel reflektiert wird. Die Teilwellen,

die an der unteren Linsenoberfläche und am Spiegel reflektiert werden, interferieren. Immer wenn die Dicke des Luftspaltes um $\lambda/2$ zunimmt, erhalten wir einen zusätzlichen Interferenzring. Solche Muster werden z.B. zur Qualitätssicherung verwendet, da man sehr genau die Oberfläche ausmessen kann. Bei einer sphärischen Linse nimmt die Dicke des Luftspalts in erster Näherung quadratisch mit dem Abstand vom Auflagepunkt zu. Eine gute Linse erzeugt somit konzentrische Ringe, deren Abstand invers mit dem Abstand vom Zentrum abnimmt.

9.3.5 Kohärenz

Wir haben bisher angenommen, dass die verschiedenen Lichtquellen eine konstante Phasendifferenz (die gleich null sein kann) besitzen. Dies ist eine zwingende Voraussetzung dafür, dass Interferenz vollständig ist. In der Praxis treten aber ideale ebene Wellen nicht auf, es gibt immer Abweichungen davon. Diese Abweichung wird über die Kohärenz quantifiziert.

Die Phase einer optischen Lichtquelle kann zeitlich und räumlich variieren. Man quantifiziert die Phasenkonstanz sowohl bezüglich ihres räumlichen wie auch ihres zeitlichen Verhaltens und bezeichnet diese als Kohärenz. Eine zeitlich kohärente Lichtquelle ist per Definitionem monochromatisch. Diese Bedingung wird für keine Lichtquelle absolut erfüllt.

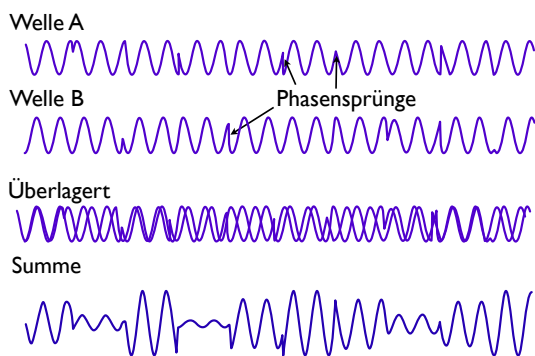


Abbildung 9.55: Kohärenzlänge eines Wellenzuges.

Eine thermische Lichtquelle hat vollständig zufällige Phasen, während ein Laser über eine gewisse Zeit konstante Phasen aufweist. Für einen kommerziel-

len Laser liegt diese Zeit bei etwa einer μs , bei einem hochgezüchteten Forschungsgerät kann sie bis auf etwa eine Sekunde verlängert werden. Man kann solche Kohärenzzeiten praktisch nur messen, indem man die Phasen von zwei unabhängigen Lasersystemen vergleicht.

Licht	Bandbreite	Kohärenzlänge
“weisses Licht”	200 THz	1.5 μm
Spektrallampe	1.5 GHz	20 cm
Halbleiterlaser	10 MHz	30 m
HeNe Laser, stab.	150 kHz	2 km
stab. Laser	1 Hz	300000 km

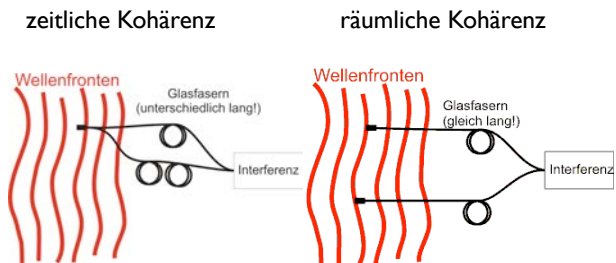


Abbildung 9.56: Zeitliche vs. räumliche Kohärenz.

Man unterscheidet zwischen zeitlicher Kohärenz, bei dem die Korrelationsfunktion der Phase an einem bestimmten Ort zu unterschiedlichen Zeiten gemessen wird,

$$c_t = \langle E(t) E^*(t + \tau) \rangle,$$

und räumlicher Kohärenz, bei der die Korrelationsfunktion zwischen unterschiedlichen Orten verglichen wird

$$c_r = \langle E(\vec{r}) E^*(\vec{r} + \vec{\rho}) \rangle.$$

Bei einer thermischen Lichtquelle existiert hier zunächst wiederum keine Kohärenz, d.h. die Kohärenzlänge ist von der gleichen Größenordnung wie die optische Wellenlänge.

Ein Laser hingegen besitzt eine gute räumliche Kohärenz, die praktisch beliebig hoch sein kann. Auch mit thermischen Quellen können räumlich kohärente Quellen erzeugt werden, indem man z.B. einen dünnen Spalt oder ein kleines Loch beleuchtet. Sofern

die Dimensionen dieser Sekundärquellen klein sind im Vergleich zur Kohärenzlänge der Primärquelle, verbessert man damit die Kohärenzeigenschaft. Die räumliche Kohärenz bestimmt, z.B., wie gut das entsprechende Licht fokussiert werden kann.

9.3.6 Anwendungen

Die Messung der räumlichen Kohärenz einer Lichtquelle erlaubt z.B. die Messung des Durchmessers von Sternen: eine punktförmige Quelle ist immer räumlich (aber nicht unbedingt zeitlich) kohärent. Ein Stern hat aber eine endliche Oberfläche, deren Teile zueinander nicht kohärent sind.

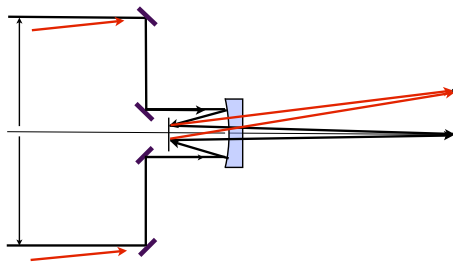


Abbildung 9.57: Messung eines Sterndurchmessers mit Hilfe eines Interferometers.

Indem man die Phase von Lichtstrahlen im Abstand von einigen Dutzend m misst kann man die Ausdehnung eines Sterns bestimmen. Die Bedingung hierfür ist praktisch identisch wie die Auflösungsbedingung von Abbé.

Das grundsätzliche Idee dafür stammt von Fizeau, ein genauer Vorschlag von Michelson. Er wurde zuerst am Mount Wilson Observatorium in den USA realisiert und dazu verwendet, den Durchmesser von Beteigeuze zu bestimmen (1920). Nach aktuellem Wissensstand beträgt er etwa 662 Sonnendurchmesser.

Im Bereich der Radioastronomie verwendet man ähnliche Interferometer mit Basislinien von bis zu 10000 km.

In der Medizinphysik verwendet man Kohärenztomographie für optische Messungen in streuendem Gewebe, z.B. in der Haut (siehe Teil 2 der Vorlesung, WS).

9.4 Beugung

9.4.1 Grenzen der geometrischen Optik

Im Rahmen der geometrischen Optik hatten wir angenommen, dass die Wellenlänge des Lichtes klein sei im Vergleich zu allen relevanten Distanzen. Jetzt lassen wir diese Näherung fallen und betrachten die sich daraus ergebenden Konsequenzen. Als erstes Beispiel betrachten wir Licht einer punktförmigen, weit entfernten Quelle, welches durch ein Loch in einem Schirm durchtritt. Im Rahmen der geometrischen Optik würden wir erwarten, dass sich vom Loch aus ein paralleles Lichtbündel, also ein Lichtstrahl ausbreitet.

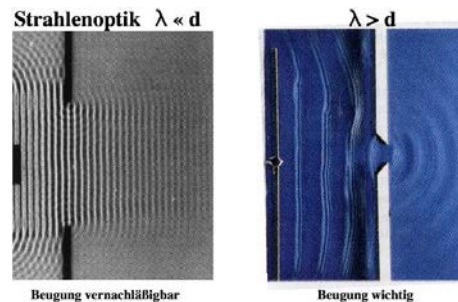


Abbildung 9.58: Beugung am Spalt.

Das Experiment zeigt, dass diese Näherung durchaus sinnvoll ist wenn das Loch groß genug ist.

Wenn das Loch sehr viel kleiner ist als die optische Wellenlänge, so wirkt das Loch als eine punktförmige Quelle einer Kugelwelle und wir erwarten eine praktisch isotrope Intensitätsverteilung. Im Zwischenbereich, wo die Dimension des Spaltes vergleichbar wird mit der optischen Wellenlänge, finden wir auf dem Schirm nicht nur einen einzelnen Fleck, sondern zusätzlich konzentrische Ringe.

9.4.2 Huygens'sches Prinzip

Natürlich könnte man dieses Beugungsmuster berechnen, indem man die Maxwell Gleichungen für den gesamten Raum lösen würde, wobei man als Grenzbedingungen die Quellen und die Schirme berücksichtigen müsste. Wir können den Aufwand

aber wesentlich reduzieren, wenn wir die Lichtausbreitung von der Quelle bis zur Blende mit Hilfe der geometrischen Optik berechnen. Wenn wir annehmen, dass der Schirm auftreffende Wellen vollständig absorbiert und die Quelle genügend weit entfernt ist, so können wir damit sagen, dass die Blende von einer ebenen Welle beleuchtet wird. Damit können wir die Maxwell Gleichungen nur für den Bereich der Blende lösen, wobei wir als Randbedingung annehmen, dass das Licht im Bereich der Blende eine ebene Welle darstellt. Die Blende stellt damit eine sekundäre Quelle dar.

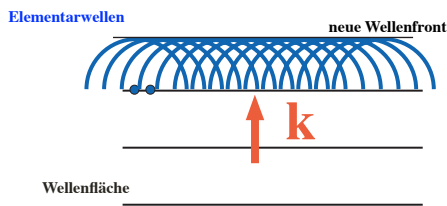


Abbildung 9.59: Das Huygens'sche Prinzip: Zerlegung einer Welle in elementare Kugelwellen.

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich, wenn man zunächst den Vektorcharakter des elektromagnetischen Feldes vernachlässigt und das Licht als eine skalare Welle beschreibt. Dieses Vorgehen wird als Prinzip von Huygens bezeichnet: Man beschreibt damit die Lichtausbreitung unter der Annahme, dass von jedem Punkt eine kugelförmige Lichtwelle ausgeht.

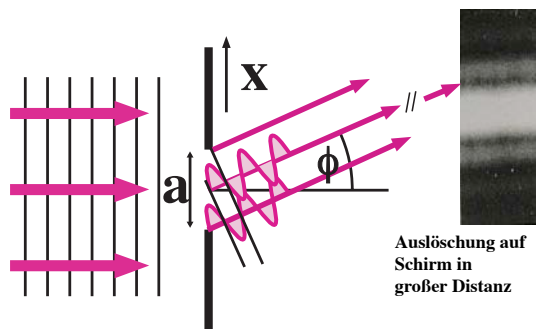


Abbildung 9.60: Feld am Detektor als Integral über den Spalt.

Mit Hilfe des Huygens'schen Prinzips können wir die Amplitude des Feldes bei einem Punkt P auf

dem Schirm berechnen als Integral über Kugelwellen. Dieses Vorgehen entspricht im Wesentlichen der Lösung mit Hilfe von Green'schen Funktionen: Wir kennen die Lösung für punktförmige Quellen und berechnen die Lösung für beliebige Quellen, indem wir über die Verteilung von punktförmigen Quellen integrieren. Wir vernachlässigen dabei allerdings den Teil der Kugelwellen, der nach hinten abgestrahlt wird. Das Feld am Punkt P erhalten wir, indem wir über alle möglichen Lichtwege integrieren, also über die Fläche der Blende, wobei wir für den freien Raum links und rechts der Blende geradlinige Ausbreitung einsetzen:

$$A(P) = \iint_{\text{Blende}} A(x) \frac{e^{ikr}}{r} dx.$$

Dabei bezeichnet e^{ikr} eine Kugelwelle, und x die Position in der Blende.

9.4.3 Beugung am Spalt

Wir betrachten zunächst das Beugungsmuster das durch einen eindimensionalen Spalt erzeugt wird. Wir betrachten dabei nur den Fall eines weit entfernten Schirms. Dabei spricht man von Fraunhofer-Beugung.

Gemäß dem Prinzip von Huygens können wir die Feldamplitude in Richtung φ als Integral über Kugelwellen ausrechnen, die entlang dem Spalt angeordnet sind. Aufgrund der Annahme einer großen Distanz können wir die Amplitude für alle Teilwellen als identisch betrachten. Der Beitrag einer Elementarwelle, die am Ort x im Spalt ihren Ursprung hat, legt einen zusätzlichen Weg von $x \sin \varphi$ zurück und erhält deshalb eine Phasenverschiebung um $2\pi x \sin \varphi / \lambda$. Damit berechnen wird das Feld in Richtung φ als Integral über den Spalt als

$$\begin{aligned} E(\sin(\varphi)) &= E_0 \int_{-a/2}^{a/2} dx e^{i2\pi x \sin \varphi / \lambda} \\ &= E_0 \frac{1}{i2\pi \sin \varphi / \lambda} e^{i2\pi x \sin \varphi / \lambda} \Big|_{-a/2}^{a/2} \\ &= E_0 \frac{\sin(\pi a \sin \varphi / \lambda)}{\pi \sin \varphi / \lambda} = E_0 a \frac{\sin \beta}{\beta} \end{aligned}$$

mit

$$\beta = \frac{\pi a \sin \varphi}{\lambda}$$

Wir finden somit, dass das Beugungsmuster als Funktion von $\sin \varphi$ gerade als die Fouriertransformierte des Spaltes gegeben ist. Im Falle eines einfachen Spaltes ist dies die sinc-Funktion.

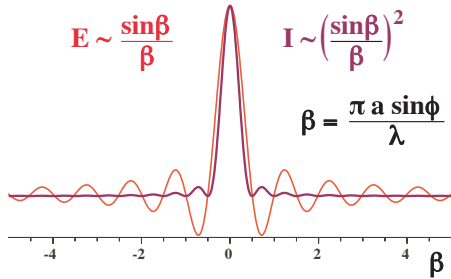


Abbildung 9.61: Amplitude und Intensität als Funktion des Beugungswinkels.

Die Intensität ist proportional zum Quadrat des Feldes, also zum Quadrat der sinc-Funktion. Wir finden eine Reihe von Beugungsmaxima, deren Abstände durch

$$\delta\beta = \pi \quad \sin \varphi = \frac{m\lambda}{a}$$

gegeben sind. Je kleiner der Spalt desto breiter wird damit das Beugungsmuster.

9.4.4 Beugung an zweidimensionalen Spalten

Die gleiche Betrachtung kann man auch für zwei-dimensionale Spalten durchführen. In diesem Fall ist das Beugungsmuster wiederum die Fourier-transformierte des Spaltes, diesmal in zwei Dimensionen.

Als Beispiel betrachten wir das Beugungsbild einer rechteckigen Blende mit Dimensionen $(a \times b)$. Wir berechnen es über die Fouriertransformation als

$$\begin{aligned} A(\alpha, \beta) &= \iint F_{ab}(x_a, x_b) e^{ik \sin \alpha x} e^{ik \sin \beta y} \\ &= \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\sin \beta}{\beta} \end{aligned}$$

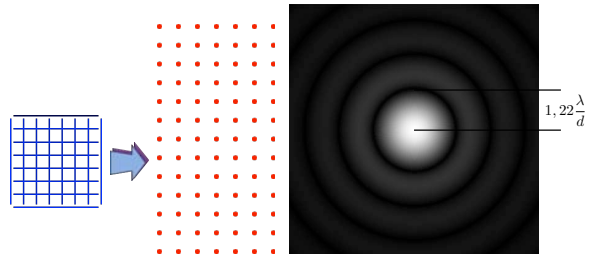


Abbildung 9.62: Beugung an einem Kreuzgitter und einem kreisförmigen Loch.

und die Intensitätsverteilung ist entsprechend das Quadrat $|A(\varphi)|^2$.

Eine runde Blende erzeugt die Airy Disk.

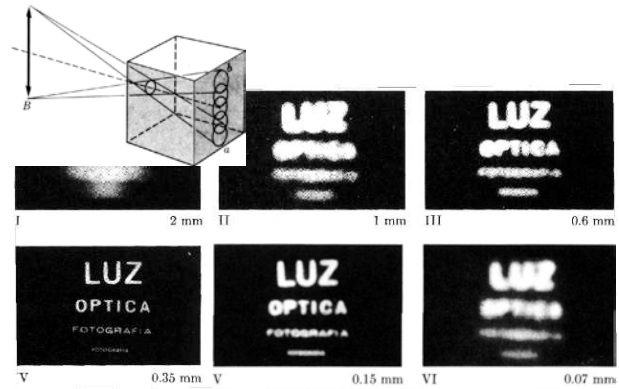


Abbildung 9.63: Auflösung einer Camera Obscura für unterschiedliche Lochdurchmesser.

Neben den Aberrationen beschränken Beugungseffekte die mögliche Auflösung eines optischen Instrumentes. Abb. 9.63 zeigt dies für das Beispiel einer Camera Obscura. Bei großen Blendendurchmessern limitiert dieser, bei kleinen Blendendurchmessern die Beugung an der Blende.

9.5 Das Auge

9.5.1 Anatomie

Optische Wahrnehmungen spielen für den Menschen eine besonders wichtige Rolle; man schätzt, dass der größte Teil unserer Informationen über den Sehsinn

aufgenommen werden. Der Sehsinn besteht neben dem Auge aus einem Teil des Gehirns; das Auge erstellt ein Bild und wandelt das auftreffende Licht in Nervenimpulse um. Diese werden im Gehirn zu nutzbaren Informationen verarbeitet.

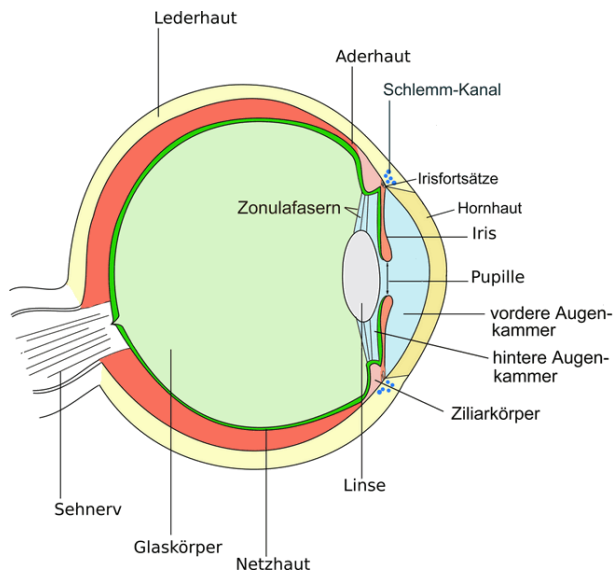


Abbildung 9.64: Anatomie des menschlichen Auges.

Das eigentliche Sehorgan ist das Auge. Die wichtigsten Bestandteile sind die Hornhaut, die vordere Augenkammer, Linse, Pupille, Glaskörper, Netzhaut und Sehnerv. Das Auge hat einen Durchmesser von etwa 24 mm, eine Masse von 7.5 g und ein Volumen von 6.5 cm³. Hilfseinrichtungen des Auges sind die Augenlider, Tränenapparat sowie die äußeren Augenmuskeln. Der Augapfel besteht aus einer gallertartigen Masse, welche zu 98% aus Wasser besteht, sowie etwas Kollagen und Hyaluronsäure (bindet Wasser). Sein Druck liegt 2-3 kPa über dem Umgebungsdruck. Das Kammerwasser wird ständig neu gebildet.

Die Hornhaut weist eine hohe Transparenz auf. Sie wird ständig von der Tränenflüssigkeit benetzt, die wiederum von einem Lipidfilm bedeckt ist. Dadurch bleibt die Oberfläche glatt (von guter optischer Qualität) und Verunreinigungen werden entfernt.

Einfallendes Licht wird durch die Hornhaut gebrochen; ihre Krümmung liefert den wichtigsten Beitrag zur Linsenwirkung des Auges. Die Linse ist

(über einen gewissen Bereich) flexibel und dient dazu, die Brechkraft so anzupassen, dass eine bestimmte Objektebene scharf abgebildet wird. Die Iris liefert einen Beitrag zur Helligkeitsadaptation, indem sie eine Variation der Blende ermöglicht. Das Bild wird auf der Retina erzeugt und durch die Sehzellen in elektrische Nervenimpulse umgewandelt.

9.5.2 Gesichtsfeld

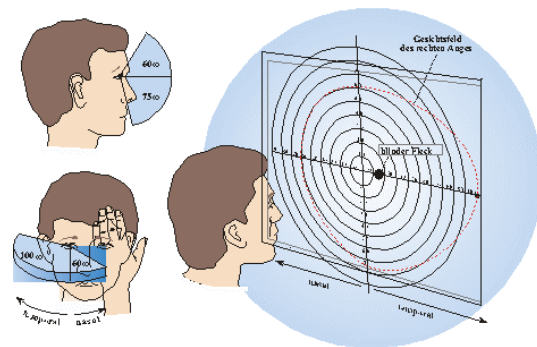


Abbildung 9.65: Gesichtsfeld

Das Gesichtsfeld des menschlichen Auges reicht in vertikaler Richtung von etwa +60° bis -75°, in horizontaler Richtung von etwa -60° bis zu +100°.

Der gelbe Fleck ist das Zentrum des Gesichtsfeldes: wenn wir auf einen Punkt fokussieren, so wird er in den gelben Fleck abgebildet. Diese Stelle besitzt die höchste Auflösung und die beste Farbwahrnehmung. Da die Region außerhalb des gelben Flecks weniger Zapfchen enthält, können wir dort weniger gut Farben unterscheiden. Umgekehrt ist der gelbe Fleck weniger empfindlich. Bei schlechten Lichtverhältnissen ist es deshalb leichter, Objekte (z.B. schwache Sterne) noch zu erkennen, wenn wir nicht direkt auf sie fokussieren, sondern etwas daneben.

Der äußere Bereich unseres Gesichtsfeldes ist eher darauf spezialisiert, Bewegungen wahrzunehmen als präzise Bilder zu liefern. Das Nervensystem verarbeitet solche Informationen und erzeugt dann u.A. einen Reflex, welcher das Auge so dreht, dass der interessante Bereich ins Zentrum der Netzhaut zu liegen kommt, wo Details erkannt werden können.

9.5.3 Abbildung im Auge

Beim Auge wird die Linsenwirkung in erster Linie von der gekrümmten Hornhaut erzeugt, so dass das in Abschnitt 9.2.3 (Brechung an einer sphärischen Grenzfläche) diskutierte Modell schon relativ gut ist.

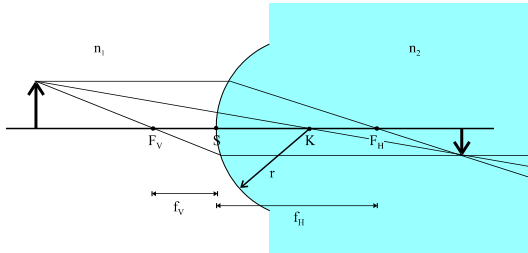


Abbildung 9.66: Abbildung durch Hornhaut und Linse.

Dieses einfache optische System aus nur einer Grenzfläche hat zwei unterschiedliche Brennweiten: 1) eine vordere Brennweite f_V , die dem Abstand zwischen dem vorderen Brennpunkt F_V und dem Scheitelpunkt S der Grenzfläche entspricht und 2) eine hintere Brennweite f_H , die dem Abstand zwischen dem Scheitelpunkt S und dem hinteren Brennpunkt F_H entspricht. Die Brennweiten lassen sich berechnen, wenn die Brechungsindizes n_1 und n_2 und der Krümmungsradius r der Grenzfläche bekannt sind. Der Knotenpunkt K ist der Mittelpunkt der Kugeloberfläche, deren Ausschnitt die lichtbrechende Grenzfläche darstellt. Ein Strahl, der durch den Knotenpunkt geht, trifft senkrecht auf die sphärische Grenzfläche und wird nicht gebrochen. Der Abstand zwischen dem Knotenpunkt und dem hinteren Brennpunkt ist gleich dem Abstand zwischen dem vorderen Brennpunkt und dem Scheitelpunkt der Grenzfläche.

Einen weiteren Beitrag liefert die Linse. Sie hat einen gegenüber der Augenkammer leicht erhöhten Brechungsindex und trägt deshalb ebenfalls zur Bilderzeugung bei. Man kann dies ebenfalls noch relativ einfach beschreiben, indem man eine zweite Grenzfläche einführt. Das System besitzt jetzt zwei unterschiedliche Krümmungsradien r_1, r_2 . n_1 bezeichnet weiterhin den Brechungsindex der Luft, n_2 denjenigen der Linse und n_3 denjenigen der Augenkammer (Glaskörper). Dann erhält man für die

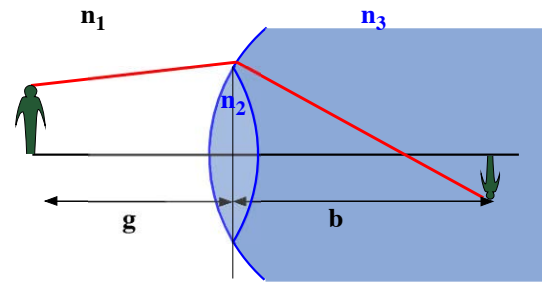


Abbildung 9.67: Abbildung durch Hornhaut und Linse.

Beziehung zwischen der Gegenstandsweite g und der Bildweite b die folgende **Abbildungsformel**:

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_3}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_3 - n_2}{r_2}.$$

In dieser Näherung reicht es, die Brechkraften der unterschiedlichen Grenzflächen zu addieren.

9.5.4 Augenmodelle

Für medizinische Anwendungen wurden verschiedene Modelle des menschlichen Auges entwickelt. Wir beginnen mit einer Zusammenfassung der relevanten physikalischen Parameter. Der Brechungsindex der Linse liegt bei etwa 1.42, leicht oberhalb dem Brechungsindex der Augenkammern. Da diese mehrheitlich aus Wasser bestehen liegt er bei etwa 1.35. Wie die einführende Diskussion gezeigt hat, sind weitere wichtige Parameter die Krümmungsradien der Grenzflächen und die Dicke der Bereiche.

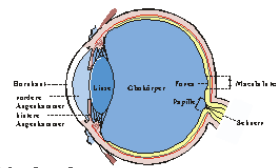
Das schematische Auge

Das Auge besitzt verschiedene brechende Grenzflächen. Prinzipiell kann man diese gleich behandeln und jeweils die Brechkraft addieren. Die Gesamtbrechkraft eines Systems aus zwei brechenden Flächen kann berechnet werden als

$$B_{ges} = B_1 + B_2 - B_1 B_2 \frac{d}{n}.$$

Hier stellen B_1 und B_2 die Brechkraften der beiden Grenzflächen dar, d ihren Abstand und n den Brechungsindex des dazwischen liegenden Mediums.

**Optische Konstanten des schematischen Auges
Durchschnittswerte für erwachsene Europäer**



Krümmungsradius [mm]		Dicke [mm]	
Vorderfläche der Hornhaut	7,72	Hornhaut	0,55
Rückfläche der Hornhaut	6,5	vordere Augenkammer	3,05
Vorderfläche der Linse	10,2	Linse	4
Rückfläche der Linse	-6	Glaskörper	16,4
Brechungsindex		Brechungsindex	
Hornhaut	1,3672	Hornhaut	1,3672
vordere Augenkammer	1,3374	vordere Augenkammer	1,3374
Linse	1,42	Linse	1,42
Glaskörper	1,336	Glaskörper	1,336

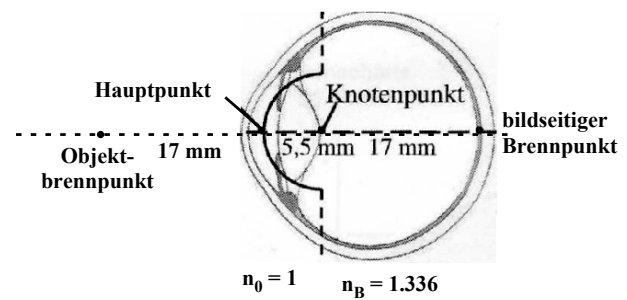
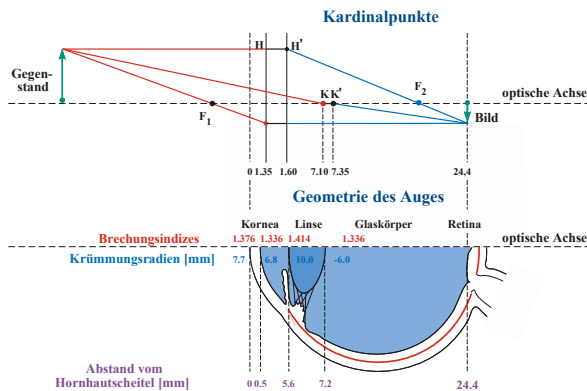


Abbildung 9.70: Schema des reduzierten Auges. [5]

Abbildung 9.68: Optische Konstanten des menschlichen Auges für Durchschnittseuropäer. [5]

Als Hauptpunkt bezeichnet man den Punkt, auf dem die Achse die sphärische Grenzfläche trifft. Der Knotenpunkt ist das Zentrum der Kugel; Strahlen, die durch den Knotenpunkt laufen, werden somit an der Grenzfläche nicht gebrochen.



Das System Luft - Hornhaut - Kammerwasser ergibt eine Brechkraft von 49 dpt. Dies entspricht einer Brennweite von 31.6 mm, also mehr als die Länge des Auges von 24 mm. Der Rest wird von der Linse erzeugt. Diese besitzt einen variablen Brechungsindex (maximal in der Mitte) und eine Brechkraft, welche durch die Akkommodation zwischen 19 und 31 dpt variiert werden kann. Damit erreicht die gesamte Brechkraft etwa 59 dpt.

Abbildung 9.69: Das schematische Auge. [5]

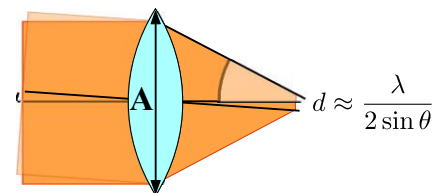
Beschreibt man die Optik des Auges nach den Regeln für dicke Linsen, so erhält man das Modell des "schematischen Auges".

9.5.5 Auflösung

Das reduzierte Auge

Die Auflösung eines optischen Instrumentes ist begrenzt durch die Beugung am abbildenden Instrument (also Linse, Auge/Iris).

Da die beiden Hauptebenen relativ nah beieinander liegen reicht es für die meisten Anwendungen, sie zusammenfallen zu lassen. Dieses Modell wird als reduziertes Auge bezeichnet. Die wichtigsten Parameter des reduzierten Auges sind



- vordere Brennweite 17 mm
- hintere Brennweite 22 mm
- Krümmungsradius 5.5 mm.

Abbildung 9.71: Auflösungsgrenze nach Abbé.

Nach Abbé ist der kleinste Winkel, unter dem zwei Objektpunkte noch getrennt dargestellt werden können,

$$\alpha_{min} = 1.22 \frac{\lambda}{A},$$

wobei λ die Wellenlänge und A den Blendendurchmesser darstellt.

Der Blendendurchmesser des Auges beträgt im Dunkeln bis zu 6 mm. Allerdings führen in diesem Bereich Linsenfehler dazu, dass die Abbildung nicht beugungsbegrenzt ist. Außerdem steht in diesem Bereich nicht genügend Licht für die optimale Auflösung zur Verfügung. Bei Tageslicht beträgt der Durchmesser der Pupille rund 2 mm. Für diesen Blendendurchmesser und eine Wellenlänge von $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ erhalten wir eine Winkelauflösung von $\alpha_{\text{min}} = 0.3 \text{ mrad}$. Dies entspricht 0.3 mm auf eine Distanz von 1 m oder 30 cm auf eine Distanz von 1 km.

Auf der Netzhaut entspricht dies $3 \cdot 10^{-4} \cdot 22 \text{ mm} \approx 6.6 \mu\text{m}$. Dies ist vergleichbar mit dem Abstand zwischen den einzelnen Sehzellen. Offenbar setzt auch hier der Organismus die Ressourcen optimal ein. Größere Sehzellen würden weniger Auflösung ergeben, kleinere schlechtere Empfindlichkeit.

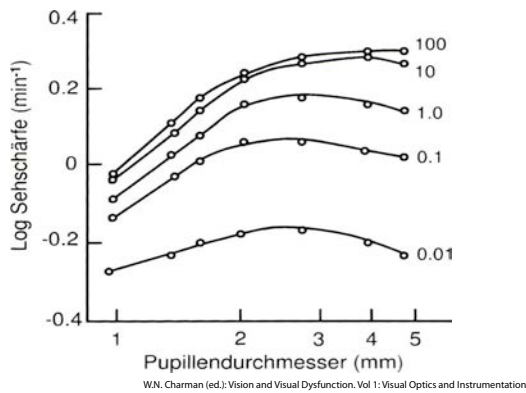


Abbildung 9.72: Sehschärfe als Funktion von Pupillendurchmesser und Helligkeit (in mL).

Abb. 9.72 zeigt wie die Sehschärfe mit dem Pupillendurchmesser und der Helligkeit variiert. Bei niedrigen Pupillendurchmessern dominiert die Beugungsbegrenzung. Bei hohen Pupillendurchmessern nimmt die Auflösung nicht so stark zu, wie man für eine beugungsbegrenzte Abbildung erwarten würde; hier führen Aberrationen zu einer Reduktion.

9.5.6 Abbildungsfehler

Im Vergleich zu einem idealen optischen Instrument zeigt auch das gesunde Auge eine Reihe von optischen Fehlern:

1. Das Bild ist nur in der Nähe des gelben Fleckes scharf. Allerdings ist nur dort die Zahl der Sinneszellen so groß, dass das Bild auch scharf detektiert werden kann.
2. Bei großem Pupillendurchmesser macht sich sphärische Aberration bemerkbar. Allerdings ist der Pupillendurchmesser nur im Dunkeln so groß, dass sich dies bemerkbar macht. In diesem Bereich "mitteln" die Ganglien über mehrere benachbarte Sinneszellen, da sie sonst nicht genügend Signal erhalten. Damit wird in diesem Bereich die Auflösung ebenfalls herabgesetzt.
3. Chromatische Aberration: blaues Licht wird stärker gebrochen als rotes. Im Wellenlängenbereich von 400-700 nm beträgt der Fehler rund 2 Dioptrien. Allerdings enthält die Fovea im zentralen Bereich keine Sinneszellen, welche für blaues Licht empfindlich sind. Für die anderen Sinneszellen ist der Unterschied in der Brechzahl zu gering als dass er sich auswirken würde.

Zusätzlich zu diesen Fehlern, die auch bei gesunden Augen auftreten, findet man unterschiedlich häufige Fehler, die als Fehlsichtigkeit zusammengefasst werden (siehe unten).

Man kann den Einfluss von Beugungseffekten und optischen Aberrationen in der "Point Spread Function" $PSF(x,y)$ zusammenfassen. Ähnlich wie eine Green'sche Funktion beschreibt sie die Abbildung eines Punkts im Ausgangsobjekt. Die Bildfunktion $g(x',y')$ wird dann

$$g(x',y') = \iint f(x,y) PSF(x' - x, y' - y) dx dy = f \otimes PSF,$$

wobei $f(x,y)$ das Objekt beschreibt.

Ungewöhnliche Aberrationen werden häufig durch eine unregelmäßige Form der Hornhaut verursacht.

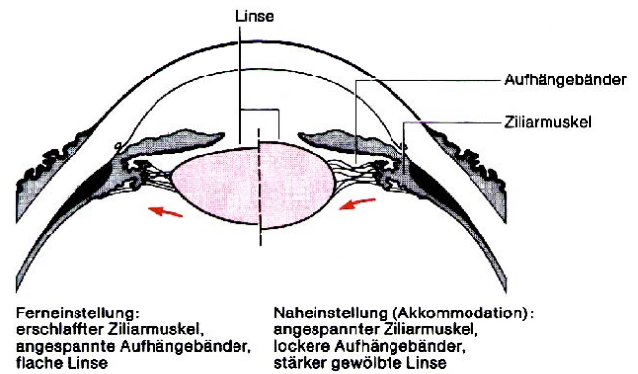
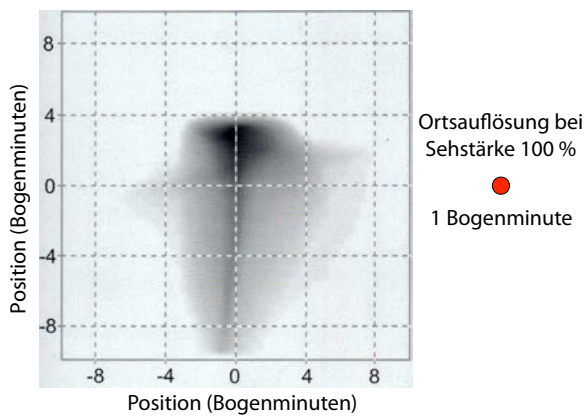


Abbildung 9.75: Akkommodation.

Abbildung 9.73: Gemessene Point Spread Function.

Es gibt deshalb eine Reihe von Geräten, welche die Oberfläche der Hornhaut messen.

9.5.7 Akkommodation

Durch die Formveränderung der Linse kann die Brechkraft variiert werden, um unterschiedlich weit entfernte Objekte jeweils scharf auf der Netzhaut abbilden zu können.

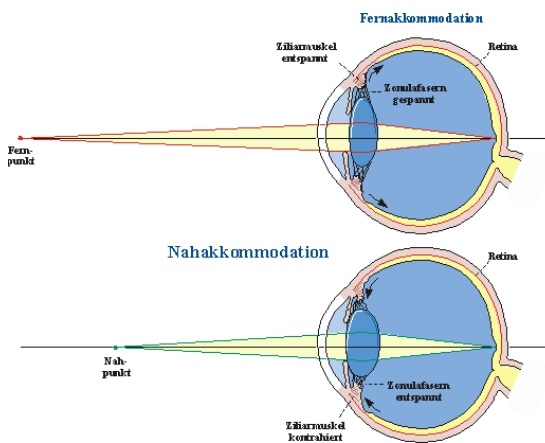


Abbildung 9.74: Akkommodation des Auges für unterschiedliche Sehdistanzen.

Dieser Vorgang wird **Akkommodation** genannt. Die notwendige zusätzliche Brechkraft, um ein Objekt in einer Distanz d scharf abbilden zu können, beträgt $1/d$.

Die Änderung der Brechkraft wird durch eine Defor-

mation der Linse erreicht. Im Ruhezustand wird die Linse durch die Zonulafasern gespannt und ist damit relativ flach, d.h. die Brechkraft ist gering. Dadurch werden weit entfernte Gegenstände scharf abgebildet. Wird der Ziliarmuskel kontrahiert, so erschlaffen die Zonulafasern und die Linse krümmt sich stärker, die Brechkraft nimmt zu, und der gegenstandseitige Brennpunkt wandert in Richtung des Auges.

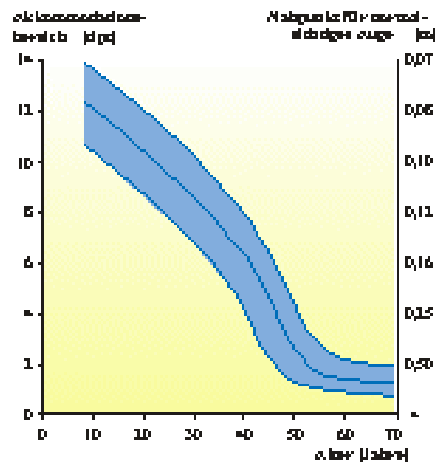


Abbildung 9.76: Änderung des Nahpunktes mit dem Alter

Kinder können ab ca. 7 cm scharf sehen. Bei Erwachsenen nimmt dieser Abstand zu, da mit fortschreitendem Alter die Linse immer weniger beweglich ist. Deshalb brauchen viele ältere Menschen zur Unterstützung der Akkommodation eine Lesebrille.

Die Linse besteht aus mehrheitlich aus extrazellulärem Material. Die wenigen Zellen werden nicht

mit Blut versorgt, sondern lediglich durch das Kammerwasser. Der entsprechend geringe Stoffwechsel reicht nicht für Reparaturen und Regenerationsmechanismen.

9.5.8 Fehlsichtigkeit

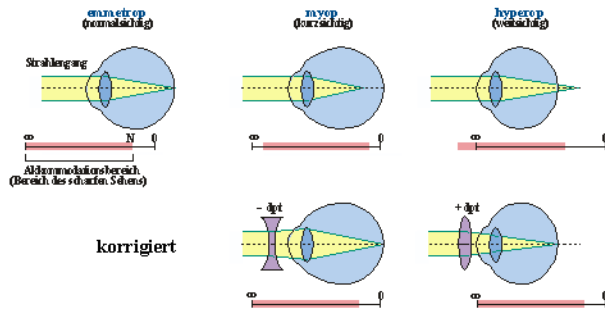


Abbildung 9.77: Korrektur verschiedener Fehlsichtigkeiten.

Im Falle von Kurzsichtigkeit ist die Brennweite zu kurz, d.h. das Bild entsteht im Inneren des Auges, und auf der Netzhaut erscheint deshalb ein verschwommenes Bild. In diesem Fall benötigt man eine Zerstreuungslinse für die Korrektur (negative Dioptrien). Im Falle der Weitsichtigkeit muss die Brennweite verkürzt werden. Die Brille besteht in diesem Fall aus Sammellinsen.

Es kommt vor, dass der Augapfel wächst und das Auge dadurch immer stärker kurzsichtig wird. Dies wird als progressive Myopie bezeichnet und kann Korrekturen um bis zu 15 Dioptrien erfordern.

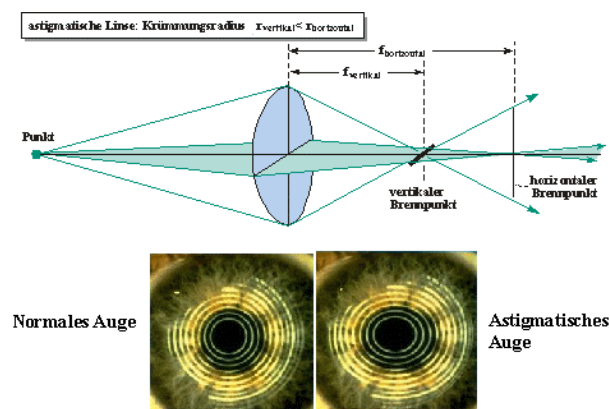


Abbildung 9.78: Astigmatismus

Ein weiterer Fehler des Auges, der relativ häufig auftritt, ist Astigmatismus: Die vertikale und horizontale Krümmung und damit die Brechkraft des Auges (allgemein: einer Linse) sind unterschiedlich. Dann wird das Licht, das von einem Punkt stammt, nicht mehr auf einen Bildpunkt fokussiert, sondern auf zwei Linien in unterschiedlicher Distanz zueinander. Je stärker der Astigmatismus, desto größer der Abstand der beiden Linien voneinander. Astigmatismus tritt bei Kleinkindern relativ häufig auf, geht dann aber meist zurück. Bei Erwachsenen tritt er vor allem zusammen mit Weit- oder Kurzsichtigkeit auf.

9.6 Bildentstehung

Die optische Abbildung erzeugt ein Bild auf der Netzhaut, wo das Licht in elektrische Impulse umgewandelt wird. Der Sehnerv leitet diese Impulse ins Sehzentrum des Gehirns, wo sie verarbeitet werden.

9.6.1 Die Netzhaut (Retina)

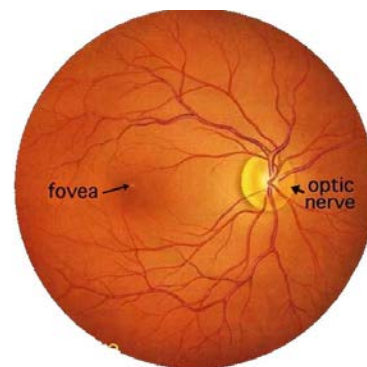


Abbildung 9.79: Bild der menschlichen Retina im Ophthalmoskop.

Blickt man durch ein Ophthalmoskop (ein optisches Instrument zur Untersuchung des Auges), so sieht man auf der Netzhaut zunächst den sog. blinden Fleck. Dies ist die Stelle, wo der optische Nerv und die Blutgefäße in das Auge geleitet werden. Deshalb besitzt diese Stelle keine Sinneszellen und eine Lichtwahrnehmung ist nicht möglich.

Auf der optischen Achse des Auges befindet sich der deutlich kleinere gelbe Fleck (Makula lutea) mit einem Durchmesser von 2.5-3 mm. Dies ist die Stelle mit der größten Dichte von Sehzellen. Dieser Teil der Retina erzeugt die schärfsten Bilder und ermöglicht gleichzeitig die beste Farbwahrnehmung.

Im Zentrum des gelben Flecks befindet sich die Fovea Centralis. Dieser Bereich hat einen Durchmesser von etwa 0.3 mm und besitzt nur Zapfen (keine Stäbchen).

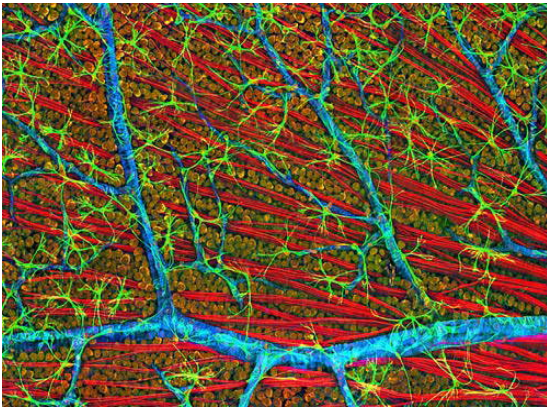


Abbildung 9.80: Retina einer Maus mit Sehzellen, Nervenzellen und Blutgefäßen.

Die Retina besteht in erster Linie aus den Sehzellen; auf der Innenseite verlaufen aber auch die Nervenzellen, welche die Signale ans Gehirn übertragen, sowie die Blutgefäße, welche die Retina mit Sauerstoff und Nährstoffen versorgen.

9.6.2 Sehzellen

In der Netzhaut eingelagert sind die Sinneszellen, welche das einfallende Licht in Nervenimpulse umwandeln. In der Netzhaut des menschlichen Auges unterscheidet man zwei Typen von Fotorezeptoren, welche als Stäbchen und Zapfen bezeichnet werden. Die Stäbchen dienen der Hell-Dunkel Wahrnehmung. Die Netzhaut enthält davon etwa 110-120 Millionen. Die Zapfen dienen der Farbwahrnehmung. Die Netzhaut enthält davon etwa 6 Millionen, welche vor allem im gelben Fleck konzentriert sind. Die Außensegmente der Zapfen sind ebenso wie die gesamte Zapfen-Fotorezeptorzelle breiter als

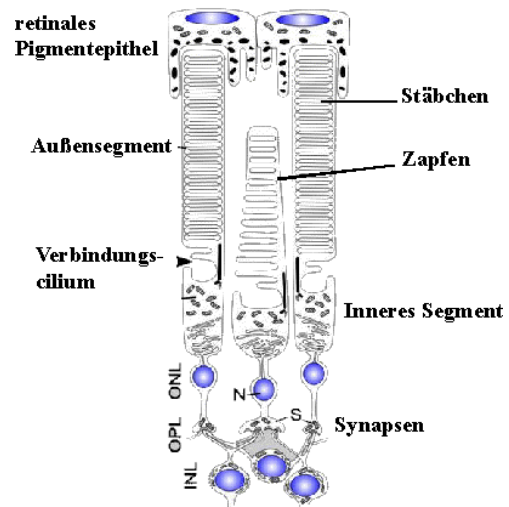


Abbildung 9.81: Aufbau der Sehzellen.

die Stäbchen und laufen konisch zu. Es handelt sich um sekundäre Sinneszellen, d.h. sie können selber keine Aktionspotenziale erzeugen.

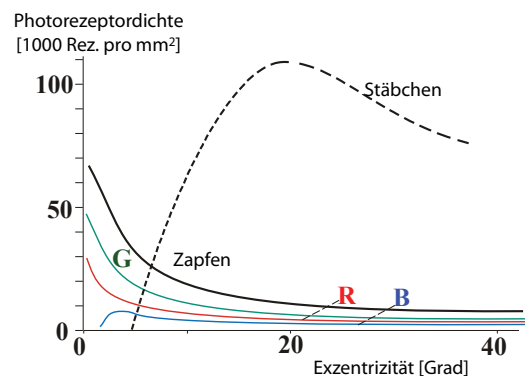


Abbildung 9.82: Verteilung der Sinneszellen auf der Retina

Die beiden Typen von Sinneszellen sind nicht gleich häufig und nicht gleichmäßig auf der Retina verteilt. Es gibt deutlich mehr Stäbchen als Zapfen, und diese sind im äußeren Bereich der Retina sehr viel stärker konzentriert als im inneren Bereich. Bei den Zapfen sind nicht alle drei Farbtypen gleich häufig; im zentralen Teil (im gelben Fleck) sind mehr Zapfen vorhanden, vor allem rote und grüne.

9.6.3 Struktur der Netzhaut

Die Umwandlung des Lichtes in elektrische Signale geschieht in spezialisierten Zellen, die Licht absorbieren und elektrische Impulse erzeugen können. Man unterscheidet zwei Typen von Lichtsinneszellen, die beide in die **Netzhaut (Retina)** eingelagert sind. Man findet etwa $120 \cdot 10^6$ Stäbchen und $6 \cdot 10^6$ Zapfchen, die ungleichmäßig über die Retina verteilt sind. Die **Zäpfchen** sind weniger empfindlich und ermöglichen das Farbsehen. Die höchste Dichte an Zapfchen gibt es im gelben Fleck (Macula lutea). Zum Rand der Retina nimmt die Zapfendichte ab, so dass am Rand nur noch Helligkeitsunterschiede erkennbar sind.

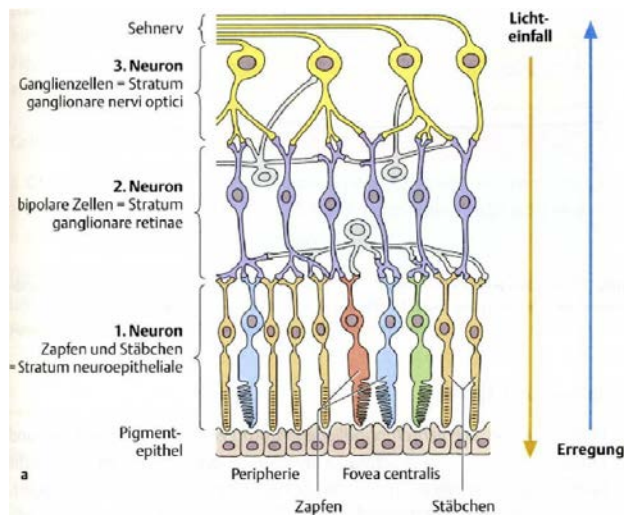


Abbildung 9.83: Bildentstehung.

Die Retina enthält die ersten 3 Neuronen der Sehbahn. Die erste Schicht besteht aus den Sinneszellen. In der zweiten und dritten Schicht findet eine erste Verarbeitung der Signale statt. Diese Neuronen stellen physiologisch und anatomisch einen *herausgestülpten Gehirnteil* dar.

Um die lichtempfindlichen Zellen zu erreichen, muss das Licht zuerst die 2. und 3. Schicht der Neuronen durchdringen. Der Lichtweg und der Informationsweg laufen somit entgegengesetzt. Man sagt deshalb, das menschliche Auge arbeite *invers*.

Der Energieverbrauch der Netzhaut liegt bei etwa 0,1 W.

9.6.4 Lichtsinneszellen

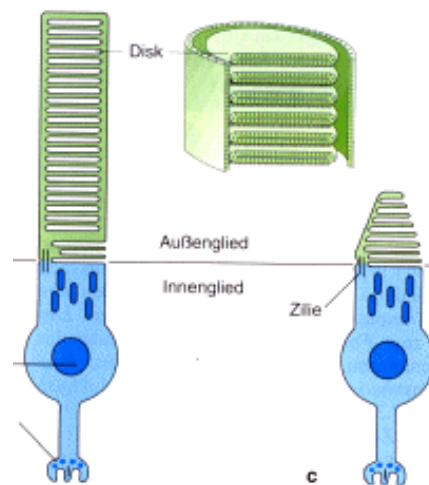


Abbildung 9.84: Struktur der Farbsinneszellen.

Beide Typen von Farbsinneszellen bestehen aus einem Außenglied, in das eine große Zahl von Farbstoffmolekülen eingelagert ist. Im Fall der Stäbchen sind diese vor allem in den geldrollenartig eingelagerten Disks enthalten. Diese Zellbestandteile werden täglich erneuert: die obersten Scheiben werden von den Pigmentepithelzellen abgebaut, während unten neue Scheiben nachwachsen. Eine Scheibe ist etwa 16 nm dick und enthält rund 10000 Rhodopsin (Farbstoff-) Moleküle.

Die Signale der Sinneszellen werden über Synapsen an die zweiten Neuronen übertragen (bipolare Zellen), von dort an die dritten Neuronen (Ganglienzellen). Dabei werden z.T. die Signale von mehreren Sinneszellen zusammen weiter geleitet, resp. verarbeitet.

9.6.5 Molekulare Vorgänge

Die chemischen Abläufe, die dem Sehvorgang zugrundeliegen sind heute weitgehend bekannt.

Der lichtempfindliche Stoff der Stäbchenzellen ist das Rhodopsin. Es besteht aus dem Protein Opsin und dem Cofaktor Retinal. Retinal entsteht aus dem Vitamin A (Retinol).

Wird Licht absorbiert, so isomerisiert das 11-cis-Retinal zum all-trans Retinal, d.h. der Schwanz dreht

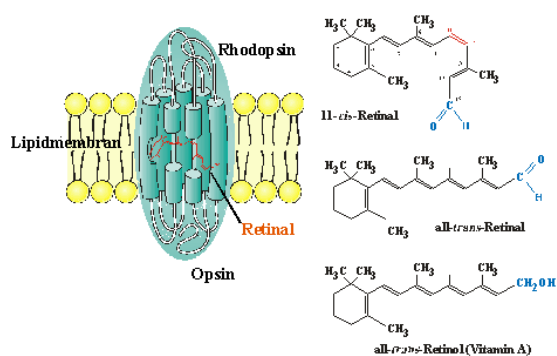


Abbildung 9.85: Sehpigment der Stäbchen

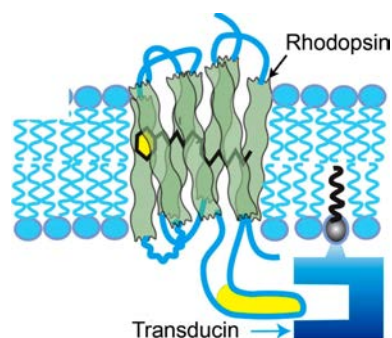


Abbildung 9.87: Rhodopsin-Transducin als Verstärker.



Abbildung 9.86: Rhodopsin.

sich um die 11-12 Doppelbindung. Die isomerisierte Form wird aus dem Protein frei und später wieder in die cis-Form umgewandelt.

Das aktivierte Rhodopsin löst eine Enzymkaskade aus: das Enzym Phosphodiesterase beginnt, den Botenstoff cGMP abzubauen, welcher dafür sorgt, dass im Dunkeln Kanäle offen gehalten werden, welche Natrium und Calcium Ionen in die Zelle einströmen lassen. Deshalb liegt im Dunkeln das Membranpotenzial der Sehzellen nur bei etwa -30 mV. Durch die reduzierte Konzentration von cGMP werden die Kanäle geschlossen, der Zustrom an positiven Ionen wird gestoppt und das Membranpotenzial steigt auf etwa -35 mV. Dieser Effekt wird als Hyperpolarisation bezeichnet. Durch ein absorbiertes Photon strömen 1 Sekunde lang ungefähr 1 Million Na^+ -Ionen weniger in die Zelle. Diese Verstärkung ist so-

mit mit einem Photomultiplier vergleichbar.

Da gleichzeitig die Ca^{2+} -Kanäle geschlossen werden, wird dadurch ein zweiter Regelmechanismus aktiviert, welcher dazu führt, dass die Empfindlichkeit des Auges an die Helligkeit angeglichen wird. Bei geringer Einstrahlung wird die Zahl der Botenmoleküle reduziert und dadurch die Empfindlichkeit des Auges erhöht. Bei intensiver Bestrahlung werden die Farbstoffe für eine bestimmte Zeit gebleicht, was zu Nachbildern führt.

Ein Stäbchen enthält etwa 10^8 Rhodopsinmoleküle. In der Netzhaut gibt es etwa 10^8 Stäbchen, also etwa 10^{16} Rhodopsinmoleküle. Rhodopsinmoleküle haben eine Lebensdauer von etwa 10^{10} Sekunden, d.h. etwa 300 Jahre. Zerfällt ein Molekül, so führt das zu einem Signal, welches dem Eintreffen eines Photons entspricht. Da pro Sekunde $10^{16}/10^{10} = 10^6$ Moleküle zerfallen "sehen" wir ein entsprechendes "Dunkellicht". Dieses entspricht etwa der Beleuchtungsstärke in einer Sternennacht und limitiert unsere Empfindlichkeit für schwaches Licht.

9.6.6 Spektrale Empfindlichkeit

Das Auge ist in einem Wellenlängenbereich von 350...700 nm empfindlich. Dieser Bereich stimmt gut überein mit dem Spektrum des Sonnenlichtes auf der Erdoberfläche, sofern wir es in Energie pro Wellenlängen- resp. Frequenzintervall messen.

Abb. 9.88 zeigt das Sonnenspektrum (als Energie pro Wellenlängenintervall sowie als Anzahl Photo-

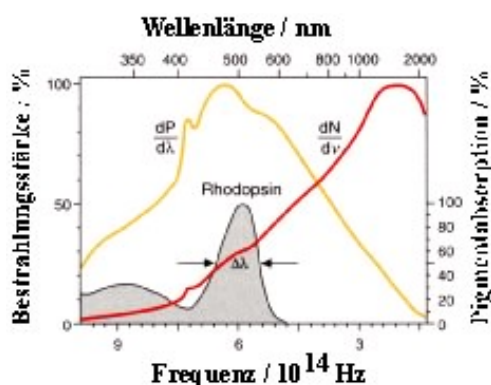


Abbildung 9.88: Vergleich der spektralen Empfindlichkeit des Auges mit dem Sonnenspektrum.

nen pro Wellenlängenintervall) und im Vergleich dazu die spektrale Empfindlichkeit des Rhodopsins. Ebenfalls dargestellt ist die Anzahl Photonen pro Frequenzintervall. Dies ist deshalb wichtig, weil bei quantenlimitierter Detektion ein Photon einen Nervenimpuls auslösen kann und damit die Zahl der Photonen die Zahl der Nervenimpulse limitiert. Die Zahl der Photonen pro Zeiteinheit beträgt

$$N = \frac{P}{h\nu}$$

und ist deshalb gegenüber dem Maximum der Leistung P zu geringeren Frequenzen ν verschoben.

Außerdem ist

$$\frac{d\lambda}{d\nu} = -\frac{c}{\nu^2}$$

Tragen wir statt P vs. λ die Leistung gegen die Frequenz auf,

$$\frac{dP}{d\nu} = \frac{dP}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\nu} = -\frac{c}{\nu^2} \frac{dP}{d\lambda}$$

so verschiebt sich das Maximum nochmals erheblich zu geringeren Frequenzen, d.h. größeren Wellenlängen.

Für die Wellenlängenabhängigkeit der Wahrnehmung spielt nicht nur die Empfindlichkeit der Sinneszellen eine Rolle, sondern das gesamte Auge.

Kurzwelliges Licht wird dabei vollständig vom Auge absorbiert bevor es die Netzhaut erreicht. Wasser und alle molekularen Stoffe absorbieren im ultravioletten Bereich des Spektrums relativ stark. Dabei

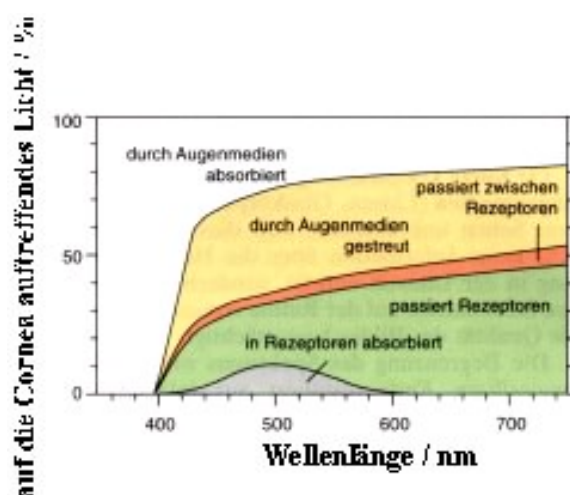


Abbildung 9.89: Verluste im Auge als Funktion der Wellenlänge.

wird ein Teil der aufgenommenen optischen Energie in der Form von Fluoreszenzlicht wieder abgestrahlt. Da dieses Fluoreszenzlicht als diffuser Hintergrund wahrgenommen wird, stört es die übrige Wahrnehmung.

Das restliche Licht wird fast zur Hälfte gestreut und geht dadurch verloren. Derjenige Teil, der die Sinneszellen erreicht, wird nur zu einem kleinen Teil absorbiert, wobei das Absorptionsmaximum bei etwa 500 nm liegt. Auch bei größeren Wellenlängen absorbieren Wasser und Proteine, so dass das Licht die Sinneszellen nicht mehr erreicht.

9.6.7 Farbsehen

Die Tatsache, dass wir unterschiedliche Gegenständen unterschiedliche Farben zuordnen können, beruht einerseits auf der Wellenlängenabhängigkeit bei Absorption, Streuung und Reflexion von Licht durch Materie, andererseits auf der Fähigkeit des Auges, unterschiedliche Wellenlängen des Lichtes in speziellen Sinneszellen (den Zapfen) selektiv zu detektieren. Je nach relativer Erregung der 3 verschiedenen Zapfentypen (kurz-, mittel-, langwelliger Rezeptor) entsteht in unserem Gehirn ein Farbeindruck.

Die Stäbchen der menschlichen Retina enthalten **Sehpurpur (Rhodopsin)**, die Zapfen 3 Farbstoffe mit unterschiedlichem Absorptionsspektrum: die

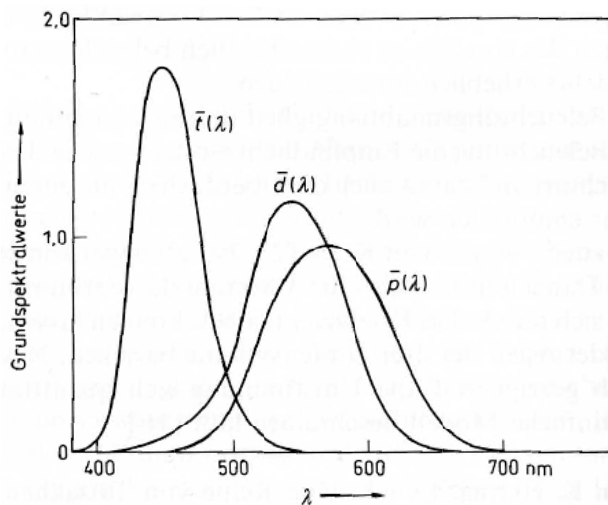


Abbildung 9.90: Flächennormierte Grundspektralwertkurven. [4]

Rhodopsine **Cyanopsin**, **Iodopsin** und **Porphyropsin**. Die sogenannten Grundspektralwertkurven geben die spektralen Empfindlichkeiten der zapfenförmigen Sehzellen wieder. Insgesamt reicht unser sichtbares Spektrum etwa von etwa 350-400 nm bis etwa 700 nm. Bei den Tieren ist das Farbsehen teilweise etwas anders verteilt, bei einigen Fischen existiert ein viertes Zapfensystem.

9.6.8 Farbblindheit

Farbblindheit tritt auf, wenn ein Zapfensystem völlig fehlt oder ein Zapfensystem eine reduzierte Empfindlichkeit besitzt. Die Rot-Grün-Sehschwäche (oder -Blindheit) macht mehr als 99% der Farbfehlsichtigkeiten aus, die umgangssprachlich als Farbblindheit bezeichnet werden. Diese Sehschwäche ist angeboren, 9% aller Männer und 0.8% aller Frauen haben sie.

Der Grund für die Geschlechterspezifität liegt darin, dass die Gene für die Opsine der Rot- und Grünzapfen auf dem X-Chromosom lokalisiert sind, von denen Männer nur eines besitzen.

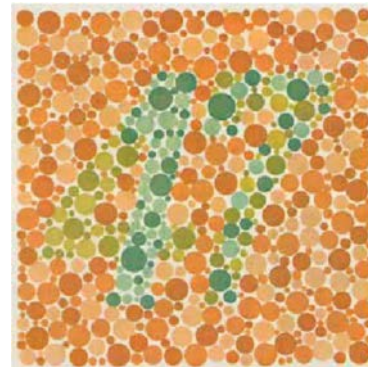


Abbildung 9.91: Test auf Rot-Grün-Sehschwäche. [7]

9.6.9 Adaptation

Die Leuchtdichte der natürlichen Umwelt des Menschen variiert über etwa 8 Größenordnungen: 10^{-4} cd/m² bei Sternenlicht bis 10^4 cd/m² bei Sonnenlicht. Um diesen großen Bereich nutzen zu können, mussten mehrere Adaptationsmechanismen entwickelt werden. Dazu trägt die Pupille lediglich etwa einen Faktor 16 bei: ihr Durchmesser reduziert sich von 4 mm auf 1 mm. Der größte Beitrag zur Adaptation erfolgt in den Sinneszellen selber, aber auch die neuronale Verarbeitung trägt dazu bei. Der genaue Mechanismus ist noch nicht geklärt, aber offenbar trägt eine Verringerung der intrazellulären Konzentration der Ca²⁺ Ionen dazu bei.

Der Adaptationsmechanismus läuft bei Stäbchen und Zapfen unterschiedlich. Die Zapfen reagieren schneller, sind jedoch bei geringem Licht deutlich weniger empfindlich. In diesem Bereich sehen wir praktisch nur noch mit den Stäbchen. Dies ist der wesentliche Grund dafür, dass wir im Dunkeln Farben schlecht erkennen können: Bei Nacht sind alle Katzen grau.

Bei Dunkeladaptation verschiebt sich auch das Maximum der relativen Helligkeitskurve des Auges zu kleineren Wellenlängen. Dies wird als **Purkinje-Effekt** bezeichnet. Sie kann im Wesentlichen darauf zurückgeführt werden, dass im Dunkeln praktisch nur noch die Stäbchen einen Beitrag liefern und diese ein Empfindlichkeitsmaximum bei etwas kürzeren Wellenlängen besitzen als die roten und grünen Zap-

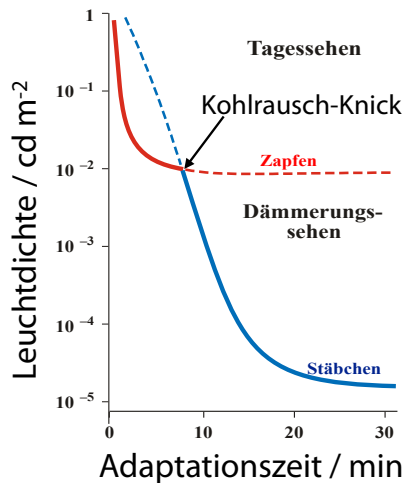


Abbildung 9.92: Zeitabhängigkeit der Adaptation von Zapfen und Stäbchen

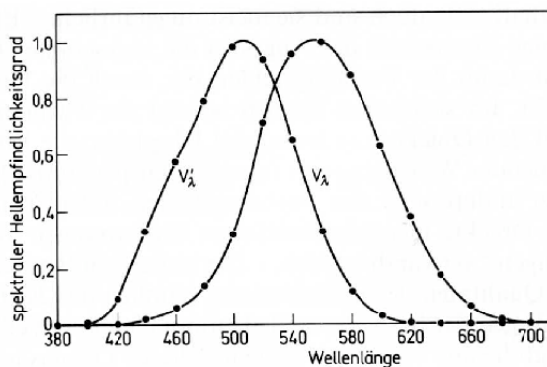


Abbildung 9.93: Relative spektrale Helligkeit des Auges für Tagesehen $V(\lambda)$ und Nachtsehen $V'(\lambda)$. [4]

fen, welche bei hellem Licht dominieren. Abgesehen vom Verlust des Farbsehens bei schlechter Beleuchtung nimmt auch die Auflösung ab, da Stäbchen im Bereich des gelben Flecks nur eine geringe Dichte aufweisen. Das Stäbchensystem ist außerdem langsamer als das Zapfensystem, so dass es schwieriger wird, Bewegungen wahrzunehmen.

Bei der Dunkeladaptation werden die Licht gewöhnten Photorezeptoren allmählich sensibler mit einer Empfindlichkeitssteigerung von etwa 6 Dekaden innerhalb von ca. 30 Minuten. Die Adaptationskurve besteht aus zwei Anteilen: 1. Adaptation des Zapfenapparates während der ersten 8 Minuten. Am Kohl-

rausch – Knick ist die Lichtempfindlichkeit um das 500-fache erhöht. 2. Stäbchenadaptation mit einer weiteren Empfindlichkeitssteigerung um den Faktor 2000.

9.7 Signalverarbeitung

9.7.1 Signale in der Netzhaut

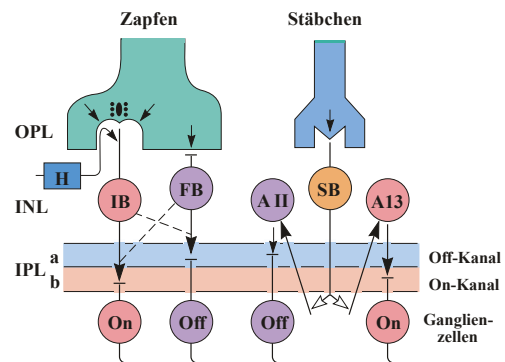


Abbildung 9.94: Signalweiterleitung in der Netzhaut.

Die Aktionspotenziale der Sinneszellen werden zur nächsten Lage von Neuronen in der Retina übermittelt. Horizontalzellen (H in Abb. 9.94) modulieren die Weiterleitung. Direkt nach der Sinneszelle stehen die Bipolarzellen (IB, FB, SB in Abb. 9.94). Die horizontalen Balken (IPLa, IPLb in Abb. 9.94) markieren Schichten von Synapsen.

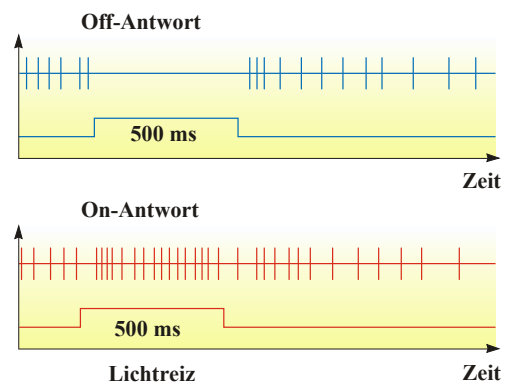


Abbildung 9.95: Antwort der Neuronen in den On- bzw Off-Kanälen.

Die Bipolarzellen aktivieren die Ganglien, bei denen man zwischen einem "On-Kanal" und einem "Off-Kanal" unterscheiden kann. Im "On-Kanal" wird durch die Belichtung die Rate der Spontanentladungen erhöht, im Off-Kanal werden sie unterdrückt.

Die meisten Signale zum Gehirn verwenden sowohl On- wie auch Off-Kanäle. Dies hat insbesondere den Vorteil, dass bei mittlerer Beleuchtung nicht alle Neuronen mit halber Leistung feuern müssen, sondern nur Kontraste und Bewegungen weiter gemeldet werden müssen.

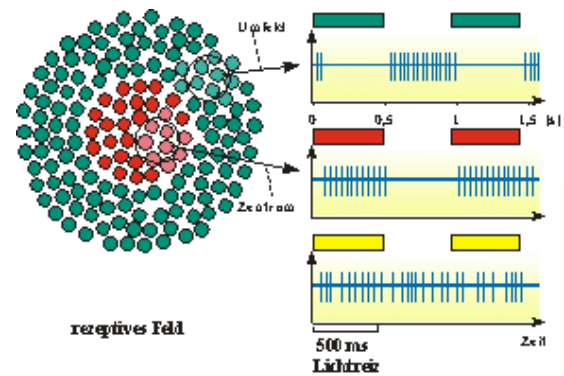


Abbildung 9.97: Signal für verschieden farbige optische Anregungen

9.7.2 Rezeptives Feld und Kontrast

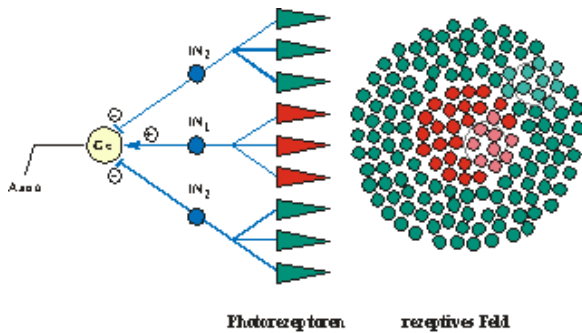


Abbildung 9.96: Zusammenfassung von Signalen in Ganglien

Die Signale der Sinneszellen werden nicht direkt ans Gehirn weitergeleitet, sondern teilweise bereits in den Ganglienzellen der Netzhaut verarbeitet. Dabei verarbeiten unterschiedliche Ganglienzellen die Signale unterschiedlich. In der Figur ist als Beispiel gezeigt, wie Signale aus dem Zentrum eines Bereichs aktivierend (IN_1 , +) und Signale aus dem Umfeld hemmend (IN_2 , -) wirken. Ein solches Ganglion, welches auf unterschiedliche Farben unterschiedlich reagiert, wird als farbkodierendes Neuron bezeichnet. Die Sehzellen, welche es mit Signalen versorgen, werden als rezeptives Feld bezeichnet. Sie besitzen unterschiedliche Farbempfindlichkeit.

Trifft in diesem Beispiel rotes Licht auf das Zentrum des rezeptiven Feldes, so kommt es zu einer Anregung. Grünes Licht am Rand führt hingegen zu einer Hemmung. Gelbes Licht regt grüne und rote Zellen

etwa gleich stark an. Deshalb wird die Antwort eines solchen Gangliens von gelbem Licht nicht beeinflusst.

9.7.3 Differenzielle Verarbeitung

Eine solche differenzielle Verschaltung von Sinneszellen hilft, Objekte gegenüber einem Hintergrund zu erkennen, der sich in Farbe, aber nicht in Helligkeit vom Objekt unterscheidet.

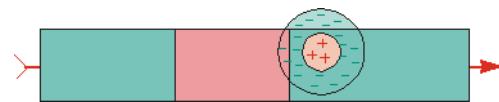


Abbildung 9.98: Bewegung vor einem farbigen Hintergrund.

In Abb. 9.98 bewegt sich ein Objekt vor einem farbigen Hintergrund. Beim Überqueren der Grenzen zwischen den einzelnen Bereichen ändern sich auch die Signale von zentralen und peripheren Zellen unterschiedlich.

Es kommen unterschiedliche Kombinationen von on- und off-verschalteten Neuronen vor. Die wichtigsten sind die Rot-Grünen Kombinationen; Blau ist seltener (besonders die off-Version) und wird dann meist gegen die Kombination von Rot und Grün verschaltet. Kombinationen ohne Farb-Diskriminierung kommen ebenfalls vor. Die farbkodierenden und nicht-farbkodierenden (d.h. Helligkeitskodierenden) Neuronen sind morphologisch unterschiedlich und

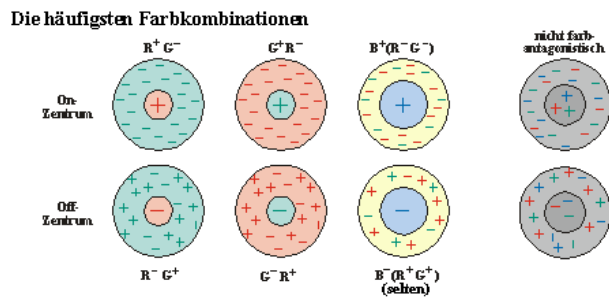


Abbildung 9.99: Die wichtigsten Verschaltungstypen

zeigen eine unterschiedliche Verteilung über die Netzhaut.

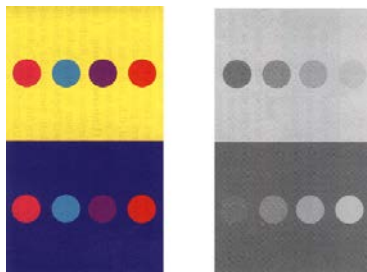


Abbildung 9.100: Differenzielle Wahrnehmung

Diese differenzielle Wahrnehmung führt zu den bekannten optischen Täuschungen: die farbigen Punkte auf der linken Seite sind oben und unten die gleichen, erscheinen aber wegen des unterschiedlichen Hintergrundes anders. Das gleiche gilt für die grauen Punkte auf der rechten Seite.

Neben der Farb- und Ortskodierung gibt es auch Neuronen, welche speziell Bewegungsprozesse detektieren, d.h. auf zeitliche Änderungen der Information reagieren. Diese Neuronen sind vor allem in der Peripherie der Netzhaut vorhanden. Ihre Signale dienen dann z.B. dazu, das Auge in die Richtung der Bewegung zu drehen.

Die Größe des rezeptiven Feldes hängt u.a. von der Helligkeit ab: bei niedriger Lichtstärke wird über einen größeren Bereich gemittelt, um mehr Licht einzusammeln; dies geht natürlich auf Kosten der Auflösung.

9.7.4 Zeitliche Auflösung

In der Netzhaut findet auch eine Analyse von Bewegungsprozessen statt. Aus der unterschiedlichen Ankunftszeit von Signalen benachbarter Neuronen werden Bewegungsrichtungen extrahiert. Die zeitliche Auflösung der Retina beträgt bei guten Beleuchtungsverhältnissen etwa 60 Lichtreize pro Sekunde, bei schwachem Licht etwa 20. In der Peripherie der Retina gibt es spezielle Bewegungssensoren, welche auch die 100 Hz einer Leuchtstofflampe noch als Flimmern erkennen können. Die Verarbeitung dieser Informationen zu einer Bewegungswahrnehmung erfolgt jedoch im Gehirn.

Die Analyse von Bewegungsprozessen kann auch dafür verwendet werden, um Bewegungsunschärfe zu vermeiden. Die relevante Integrationszeit der Photorezeptoren beträgt etwa 1/50 - 1/10 Sekunde. Separate Bilder werden bei der Wahrnehmung zu einer einheitlichen Bewegung verschmolzen (Film). Man bezeichnet dies als raum-zeitliche Interpolation.

9.7.5 Sehbahn

Die weitere Verarbeitung der visuellen Information geschieht im Gehirn.



Abbildung 9.101: Signalverarbeitung im Gehirn.

Dabei laufen die Nervenfasern aus unterschiedlichen Teilen der Retina zu unterschiedlichen Teilen des Gehirns. Die Nerven aus der rechten Seite beider

Augen (auf die die linke Seite des Gesichtsfeldes abgebildet wird) laufen zur rechten Hirnhälfte und umgekehrt. Kreuzungspunkt ist der chiasma opticum. Das Sehzentrum liegt im hinteren Bereich des Gehirns. Unterwegs zweigen einige Nerven ab, vor allem zum Bewegungszentrum.

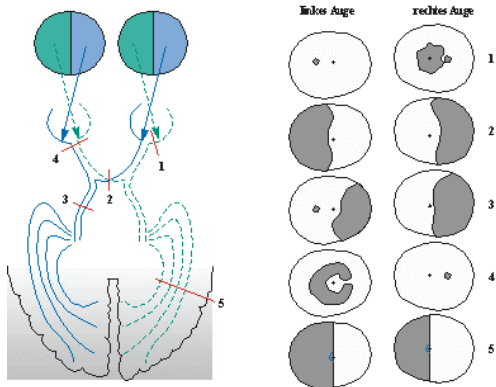


Abbildung 9.102: Gesichtsfeldausfälle.

Den Verlauf der Nerven kann man u.a. anhand von Gesichtsausfällen rekonstruieren, je nachdem an welcher Stelle die Nerven unterbrochen sind, fallen für die beiden Augen unterschiedliche Teile des Gesichtsfeldes aus. Umgekehrt kann man anhand einer Vermessung des Gesichtsfeldes feststellen, an welcher Stelle der Sehnerv geschädigt ist. Schädigungen können z.B. auftreten durch Entzündungen oder Tumore.

Besonders wichtig ist in dem Zusammenhang, dass die informationsverarbeitenden Prozesse sich praktisch ausschließlich in der frühen Kindheit ausbilden. Daher muss ein Schielen in diesem Alter unbedingt behandelt werden, sonst kann es zu einer Degeneration von Sehnerven kommen.

Das Gehirn steuert auch die Ausrichtung des Auges und sorgt z.B. dafür, dass der zentrale Teil des Bildes auf den gelben Fleck abgebildet wird, wo die Sehschärfe maximal ist.

9.7.6 Verarbeitung im visuellen Cortex

Die weitere Verarbeitung erfolgt primär im visuellen Cortex (weitere Gebiete sind u.a. für die Kontrolle

der Ausrichtung der Augen zuständig). Die Verarbeitung hier erfolgt grundsätzlich ähnlich zur Verarbeitung in der Retina.

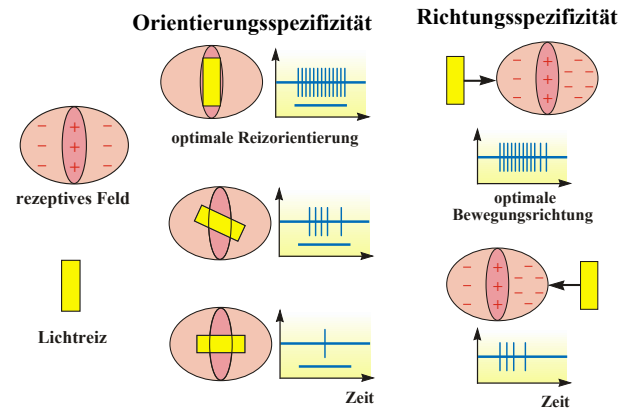


Abbildung 9.103: Erkennung von Mustern.

Es werden jeweils aktivierende und hemmende Signale in geeigneter Weise kombiniert, wie in Abb. 9.103 gezeigt. So kann man eine Orientierung messen, indem eine längliche aktivierende Region mit einem entgegengesetzt verlängerten hemmenden Umfeld kombiniert wird. Ist der Überlapp maximal, so wird die Aktivierung maximal.

Eine Bewegungsrichtung kann gemessen werden, indem die beiden Seiten des Umfeldes unterschiedlich stark aktivieren und die Sinnesreize mit einer entsprechenden Verzögerung kombiniert werden.

Weitere Verarbeitungsschritte ermöglichen stereoskopisches Sehen, Erkennen von Mustern etc.

9.8 Erkrankungen

9.8.1 Retina

Blindheit kann die Folge einer Vielzahl unterschiedlicher Erkrankungen sein. Sehr oft ist es die Retina, welche von degenerativen Vorgängen soweit geschädigt ist, dass Patienten vollkommen kommen blind werden. Um diesen Patient ihr Augenlicht zurückzugeben wird weltweit nach Lösungen gesucht. Die Technik ist jedoch noch nicht so weit, dass diese für längere Zeit im Auge des Patienten verbleiben könnten.

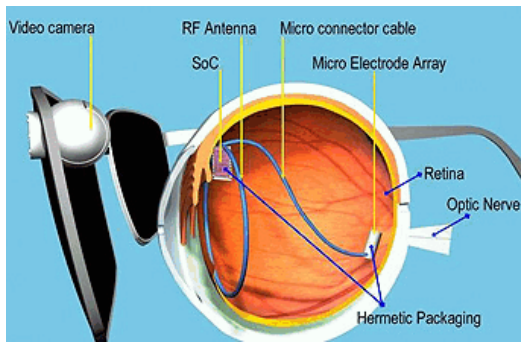


Abbildung 9.104: Künstliche Retina.

Es ist inzwischen auch möglich, die Sehzellen teilweise zu ersetzen. Ein als "künstliche Retina" bezeichnetes System besteht aus einer Kamera und einem elektronischen Bauteil, der ins Auge eingepflanzt wird und anhand der Videoaufnahmen direkt die Sehnerven stimuliert.

9.8.2 Visueller Cortex

In Fällen mit nicht mehr funktionierendem Nervus Opticus hilft auch kein Retina-Implantat, denn die von diesem ausgehenden Sinnesreize würden den visuellen Cortex überhaupt nicht erreichen können. Stattdessen wurde vorgeschlagen, den visuellen Cortex direkt zu stimulieren. Dazu können Elektroden unter dem Schädel, auf dem visuellen Cortex aufgebracht werden. Tatsächlich waren Patienten in entsprechenden Versuchen in der Lage, einfachste Lichtempfindungen zu registrieren. Um einfachste Eindrücke zu erhalten, werden einige Dutzend Elektroden benötigt.

Ein wesentliches Problem bei der Herstellung von künstlichen Retinas ist der Energieverbrauch: normale Detektorchips benötigen sehr viel mehr Energie als die menschliche Retina (≈ 100 mW).

9.8.3 Grauer Star

Altersbedingte Linsentrübung kann zur Blindheit führen, wenn nicht operiert wird. Symptome sind langsam zunehmende Sehstörungen, die die Gegenstände als grau erscheinen lassen. Der graue

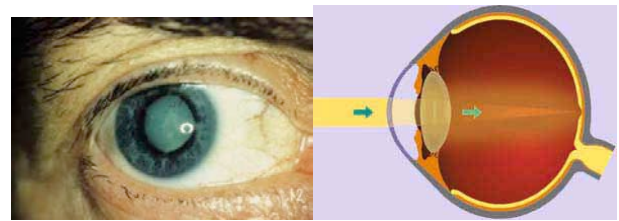


Abbildung 9.105: Grauer Star: Erscheinungsbild und Ursache.

Star kann operativ behandelt werden: dazu wird die Hornhaut aufgeschnitten und ein Ultraschall-Transducer eingeführt. Damit wird die getrübte Linse zertrümmert und abgesaugt. Danach wird eine Kunststofflinse eingesetzt und die Hornhaut wieder geschlossen.

9.8.4 Glaukom

Das Glaukom, auch grüner Star genannt, entsteht durch zu hohen Innendruck im Auge. Dadurch reicht der Blutdruck nicht für eine genügende Versorgung der Retina mit Sauerstoff und die Sehnerven sterben ab. Dieser Prozess wird als "Glaukom" (=grüner Star) bezeichnet.

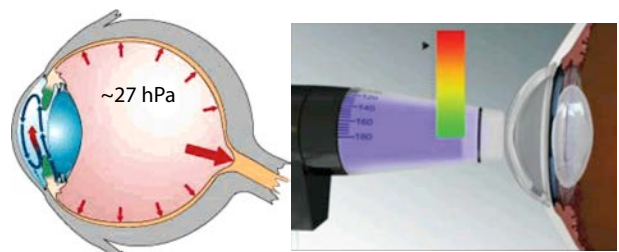


Abbildung 9.106: Glaukom (Grüner Star): Schädigung von Retina und Sehnerv durch zu hohen Innendruck. Rechts: Messung des Augendrucks.

Für die Diagnose des Glaukoms sind Druckmessungen entscheidend. Dafür drückt man mit einer definierten Kraft auf die Hornhaut und misst die resultierende Abflachung. Der Augendruck kann auch kontaktfrei mit einem Luftpuls gemessen werden.