

Ausgabe: 19.12.2014

Abgabe: bis 09.01.2015 10:15 Uhr

Prof. Dr. D. Suter

Aufgabe 1: Auflösung**2 Punkte**

Dem Weihnachtsmann sind in seinem Sack die Geschenke durcheinander geraten. Seine Elfen haben die Pakete hübsch verpackt, deshalb nutzt er sein portables Ultraschallgerät, um herauszufinden, welches Geschenk er in welchem Haus abliefern muss. Er sucht das Paket, in dem sich ein Modellflugzeug befindet. Die kleinsten Teile darin haben eine Dicke von $d = 1$ mm.

- Mit welcher Frequenz muss er die Pakete untersuchen, um diese Teile axial auflösen zu können? Die Schallgeschwindigkeit in den Kunststoffteilen beträgt $c = 1500 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
- Bis zu welcher Tiefe kann er die Teile im Fokalbereich des Strahls auch lateral auflösen, wenn der Ultraschallwandler einen Durchmesser von $D = 3$ mm hat?
- Wie wirkt sich eine Verringerung des Durchmessers D auf die laterale Auflösung und den Fokalebereich aus?

Aufgabe 2: Quantenmechanische Grundlagen NMR**3 Punkte**

- Ein Teilchen mit Spin $1/2$ in Ruhe befindet sich in einem Magnetfeld, welches in z -Richtung zeigt.

$$\mathbf{B} = B_0 \hat{e}_z \quad (1)$$

Bestimmen Sie die Erwartungswerte des Kernspins in allen drei Richtungen ($\langle I_x \rangle, \langle I_y \rangle, \langle I_z \rangle$), wenn der Hamiltonoperator gegeben ist, als:

$$\mathbf{H} = -\gamma B_0 \mathbf{I}_z = -\frac{\gamma B_0 \hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Der Zustand, für den die Erwartungswerte bestimmt werden sollen, ist

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \mathbf{e}^{i\gamma B_0 t/2} \\ \sin(\alpha/2) \mathbf{e}^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix} \quad (3)$$

- Mit einem Kernspintomographen soll die Verteilung von ^{23}Na im Körper untersucht werden. Berechnen Sie die Energie von jedem möglichen Niveau für $I = 3/2$.
- Zeichnen Sie ein Diagramm, in dem Sie zeigen, wie sich die Energien aus b bei größer werdendem Magnetfeld verhalten. Welche Energiewerte haben wir, bei einem in MRI-Geräten typischen Magnetfeld von 3T?

Aufgabe 3: Relaxations- und Weihnachtszeit**3 Punkte**

In den Weihnachtsferien führen fleißige Studenten ein MRI-Experiment mit einer Glühweinprobe durch. Dazu invertieren Sie deren Gleichgewichtsmagnetisierung $M_{0,\text{Glüh}}$ durch einen 180° -RF-Puls.

- Bestimmen Sie mit Hilfe der Bloch-Gleichung den zeitlichen Verlauf der Rückkehr ins Gleichgewicht, $M_z(t)$. Wie lange dauert es bei einer longitudinalen Relaxationszeit von $T_1 = 1$ s bis 90% von M_0 wieder hergestellt ist?

- b.) Wie groß ist $M_{0,\text{Glüh}}$ bei der Glühweinprobe in einem Feld von $B_0 = 2 \text{ T}$ und einer Temperatur von $T = 56,5^\circ\text{C}$? Nähern Sie den Glühwein dafür als ein Ethanol-Wasser Gemisch, mit einem weihnachtlichem Ethanolgehalt von 15 Volumenprozent. ($M_{\text{C}_2\text{H}_6\text{O}} = 46\text{g/mol}$, $\rho_{\text{C}_2\text{H}_6\text{O}} = 0,79\text{g/cm}^3$)
- c.) Zusatzaufgabe: Skizzieren Sie die Bewegungsbahn eines Studenten, der sich dem Ort des Glühwein-Experimentes nähert. Der Student versucht dabei die Kurve einer transversalen Relaxation in den Schnee zu projizieren und hat vorher eingehend die Experimentierflüssigkeit getestet.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch!