

Ausgabe: 12.12.2014

Abgabe: bis 19.12.2014 10:15 Uhr

Prof. Dr. D. Suter

Aufgabe 1: Positronen Emissions Tomographie**3 Punkte**

Bei einer Untersuchung mit einem PET wird dem Patienten ein Radiopharmakon verabreicht. Eine Detektionsmatrix nimmt anschließend Photonen auf, die durch Auslöschung eines abgestrahlten Positrons und eines Elektrons des Gewebes entstehen.

- Unter einem Parapositronium versteht man ein Quasiatom, das aus einem Positron und einem Elektron besteht. Ihre Spins sind zudem entgegengesetzt ausgerichtet. Zeigen Sie, dass bei dem Zerfall eines solchen Partikels zwei sich entgegengesetzt ausbreitende Photonen entstehen. Vernachlässigen Sie die Geschwindigkeit des Elektrons und des Positrons für die Berechnung.
- Was ändert sich, wenn das Parapositronium eine kinetische Energie besitzt? Bei einem Orthopositronium sind die Spins der einzelnen Teilchen gleich ausgerichtet. Was bedeutet dies in Bezug auf die Zahl der emittierten Photonen und deren Energie?
- Nehmen Sie vereinfacht an, dass die zu untersuchende Stelle des Patienten aus koaxialen Schichten mit den Absorptionskoeffizienten $\mu(r)$ bestehe. Ebenso sei die Detektionsmatrix kreisförmig und habe einen Durchmesser von 22cm. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beide Photonen auf der Matrix detektiert werden, wenn ein langsames Parapositronium 3cm vom Zentrum zerfällt. Zudem fliegt ein Photon durch das Zentrum des Detektors.

$$\mu(r) = \begin{cases} \mu_{\text{Blut}} & = 0.18 \text{ cm}^{-1} & r \leq 2 \text{ cm} \\ \mu_{\text{Gewebe}} & = 0.17 \text{ cm}^{-1} & 2 \text{ cm} < r < 5 \text{ cm} . \\ 0 & & r \geq 5 \text{ cm} \end{cases} \quad (1)$$

Aufgabe 2: Doppler Sonographie**3 Punkte**

Mit der Doppler-Ultraschall Methode wird ein Blutgefäß untersucht. Der Sender emittiert Ultraschall mit einer Frequenz von $f_0 = 5 \text{ MHz}$, die Schallgeschwindigkeit soll im menschlichen Gewebe und im Ultraschallkopf als $c = 1500 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ angenommen werden.

- Bestimmen Sie die Frequenz des Schalls, die ein Blutkörperchen, das sich mit der Geschwindigkeit $v_0 = 5 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ vom Ultraschallkopf weg bewegt, wahrnimmt.
- Bestimmen Sie die Frequenz f_r des vom Blutkörperchen reflektierten Schalls die am Schallkopf gemessen wird.
- Leiten Sie eine Formel für die Differenzfrequenz $\Delta f = f_0 - f_r$ in Abhängigkeit der Geschwindigkeit des Blutkörperchens her. Beachten Sie den Winkel α zwischen Blutgefäß und emittiertem Ultraschall.
- Betrachten Sie den relativen Fehler $\frac{\epsilon_{\Delta f}}{\Delta f}$ der gemessenen Frequenzverschiebung für die Winkel $\alpha_1 = 10^\circ, \alpha_2 = 30^\circ, \alpha_3 = 45^\circ$ unter der Annahme, dass der Arzt den Ultraschallkopf auf $\epsilon_\alpha = 5^\circ$ genau ausrichten kann und dies die einzige Fehlerquelle ist.

Aufgabe 3: Ultraschall

3 Punkte

- a.) Leiten Sie mithilfe der Stetigkeitsbedingungen einer Welle an der Grenzfläche zwischen zwei Medien die in der Vorlesung angegebenen Gleichungen für Transmissions- und Reflexionskoeffizient her:

$$R = \frac{Z_2 \cos(\theta_1) - Z_1 \cos(\theta_2)}{Z_1 \cos(\theta_2) + Z_2 \cos(\theta_1)} \quad (2)$$

$$T = \frac{2 \cdot Z_2 \cos(\theta_1)}{Z_1 \cos(\theta_2) + Z_2 \cos(\theta_1)} \quad (3)$$

- b.) Zur Anpassung der Impedanz wird zwischen Schallkopf und Haut ein Gel verwendet um unerwünschte Reflexionen beim Einkoppeln in die Haut bzw. ins Gewebe zu vermeiden. Welche Reflexionsverluste erhalten Sie, wenn Sie das Gel vergessen haben und somit die Einkopplung von Luft ins Gewebe erfolgt? (Senkrechter Einfall, $Z_{Luft} \approx 430 \frac{kg}{sm^2}$, $Z_{Gewebe} \approx 1,5 \cdot 10^6 \frac{kg}{sm^2}$)
- c.) Schätzen Sie ab, ob Sie mit einem Ultraschallgerät mit Frequenz 2 MHz einen Fremdkörper im Gewebe ($Z_{Gewebe} \approx 1,5 \cdot 10^6 \frac{kg}{sm^2}$, $\rho_{Gewebe} \approx 1,01g/cm^3$) der Größe 0,5 mm direkt in der Aufnahme erkennen können ohne zusätzliche Annahmen über Pulslänge und Geometrie des Schallkopfes machen zu müssen?