

Ausgabe: 13.12.2013

Abgabe: bis 08.01.2014 10:15 Uhr

Prof. Dr. D. Suter

Aufgabe 1: Positronen Emissions Tomographie**3 Punkte**

Bei einer Untersuchung mit einem PET wird dem Patienten ein Radiopharmakon verabreicht. Eine Detektionsmatrix nimmt anschließend Photonen auf, die durch die Auslöschung eines abgestrahlten Positrons und eines Elektrons des Gewebes entstehen.

- Unter einem Parapositronium versteht man ein Quasiatom, das aus einem Positron und einem Elektron besteht. Ihre Spins sind zudem entgegengesetzt ausgerichtet. Zeigen Sie, dass bei dem Zerfall eines solchen Partikels zwei sich entgegengesetzt ausbreitende Photonen entstehen. Vernachlässigen Sie die Geschwindigkeit des Elektrons und des Positrons für die Berechnung.
- Was ändert sich, wenn das Parapositronium eine kinetische Energie besitzt und was hat dies für Auswirkungen für die Bildgebung?
- Nehmen Sie vereinfacht an, dass die zu untersuchende Stelle des Patienten aus koaxialen Schichten mit den Absorptionskoeffizienten $\mu(r)$ bestehe. Ebenso sei die Detektionsmatrix kreisförmig und habe einen Durchmesser von 25 cm. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beide Photonen auf der Matrix detektiert werden, wenn ein langsames Parapositronium 5 cm vom Zentrum zerfällt und eines der beiden Photonen durch das Zentrum des Detektors fliegt.

$$\mu(r) = \begin{cases} \mu_{Blut} & = 0,18 \text{ cm}^{-1} & r \leq 4 \text{ cm} \\ \mu_{Gewebe} & = 0,17 \text{ cm}^{-1} & 4 \text{ cm} < r < 8 \text{ cm} \\ & = 0 \text{ cm}^{-1} & r \geq 8 \text{ cm} \end{cases} \quad (1)$$

Aufgabe 2: Doppler-Ultraschall**3 Punkte**

- Die Fließgeschwindigkeit des Blutes in einer Arterie soll mit der Doppler-Ultraschall-Methode untersucht werden. Die Frequenz des emittierten Ultraschalls beträgt $f_0 = 8 \text{ MHz}$. Die gemessene Frequenzverschiebung beträgt 1200 Hz.

Leiten Sie die bei der Doppler-Ultraschall-Methode gemessene Frequenzverschiebung $\Delta f = f_B - f_0$ her, indem Sie eine Formel für die Frequenz f_B der von den Blutkörperchen reflektierten Schallwelle in Abhängigkeit von f_0 aufstellen. Wie hoch ist die Fließgeschwindigkeit des Blutes in der Arterie, wenn der Ultraschall-Strahl sich in einem Winkel von 60° zu ihr befindet? Für die Geschwindigkeit des Ultraschalls im Körper soll $v_{US} = 1500 \text{ m/s}$ angenommen werden.

- Eine Fledermaus fliegt mit $6,5 \text{ m/s}$ auf eine Motte zu, während die sich mit 5 m/s auf die Fledermaus zu bewegt. Die Fledermaus emittiert eine Schallwelle mit 53 kHz . Welche Frequenz hat die von der Motte reflektierte und anschließend von der Fledermaus empfangene Schallwelle?

Aufgabe 3: Ultraschallwandler**3 Punkte**

- Ein Ultraschallwandler soll aus $N = 5$ einzeln ansprechbaren piezoelektrischen Kristallen bestehen. Sie sind senkrecht zur Abstrahlrichtung in einem Abstand von $\Delta d = 0,3 \text{ cm}$ voneinander angebracht. Das Gerät soll Schall mit einer Frequenz $\nu = 300 \text{ kHz}$ erzeugen, der im Gewebe eines Patienten in einer Entfernung $d = 5 \text{ cm}$ senkrecht zur Kristallanordnung fokussiert ist. Man gehe

davon aus, dass der mittlere Kristall dem Fokus am nächsten liegt. Wie muss die Phase ϕ_n der einzelnen Wellen, die von den Kristallen ausgehen, gewählt werden? Welcher zeitlichen Verzögerung τ_n der Treibersignale entspricht dies? Das Gewebe habe die Eigenschaften von Wasser (d.h. $c = 1500 \text{ m/s}$).

- b.) Bei einem anderen Ultraschallwandler gibt ein Hochfrequenzgenerator bei Erregung der Piezokristalle eine Wirkleistung von 155 W ab. Dieser elektroakustische Wandler arbeitet mit einem Wirkungsgrad von $\eta = 0,6$. Die Kristallflächen haben bei diesem Gerät eine Größe von jeweils $A = 10 \text{ cm}^2$ und sollen gleichmäßig angeregt werden. Welche Ultraschallintensität kann der Wandler maximal abstrahlen?
- c.) Wie groß ist der Effektivwert des (Wechsel-) Drucks für das Gerät aus b) in der Luft und in den Muskeln? (Reflexionen seien vernachlässigbar). Es gilt: $Z_{Luft} = 43 \text{ g}/(\text{cm}^2\text{s})$, $Z_{Muskel} = 1,63 \cdot 10^5 \text{ g}/(\text{cm}^2\text{s})$. Ist dieses Gerät für Therapieanwendungen geeignet?