

3.3 Stationäre Lösung der Bloch-Gleichungen

Die stationären Lösungen der Bloch-Gleichungen können relativ einfach gefunden werden, z.B. indem man jeweils eine Gleichung

$$dM_x/dt = -\Delta\omega M_y - M_x / T_2 = 0$$

nach einer Variablen auflöst, z. B.

$$M_x = -\Delta\omega T_2 M_y .$$

Als Resultat erhält man die folgende stationäre Lösung:

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}_\infty = \frac{M_0}{\frac{1}{T_2} + \Delta\omega^2 + \omega_1^2 \frac{T_1}{T_2}} \begin{pmatrix} \Delta\omega \omega_1 \\ \frac{\omega_1}{T_2} \\ \frac{1}{T_2} + \Delta\omega^2 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten nun zunächst die Komponenten einzeln. Es zeigt sich dabei, dass die Relaxationszeiten die Form und Amplitude der Resonanzlinien als Funktion der Frequenz bestimmen. Dies bietet prinzipiell die Möglichkeit T_1 und T_2 auch ohne die Einstrahlung von RF-Pulsen zu bestimmen.

3.3.1 Longitudinale Magnetisierung

Die z-Komponente wird

$$M_{z\infty} = M_0 \frac{\frac{1}{T_2} + \Delta\omega^2}{\frac{1}{T_2} + \Delta\omega^2 + \omega_1^2 \frac{T_1}{T_2}} = M_0 \left(1 - \frac{\omega_1^2 T_1 T_2}{1 + \Delta\omega^2 T_2^2 + \omega_1^2 T_1 T_2} \right).$$

Wir betrachten folgende Grenzfälle:

- verschwindende RF-Feldstärke, $\omega_1 \rightarrow 0$:

$$M_{z\infty} = M_0 ,$$

d.h. wir erhalten den ungestörten Fall zurück.

- große RF-Feldstärke, $\omega_1 \rightarrow \infty$: in diesem Fall können wir bei den Termen im Nenner die beiden, die nicht von der RF Feldstärke abhängen, vernachlässigen und erhalten

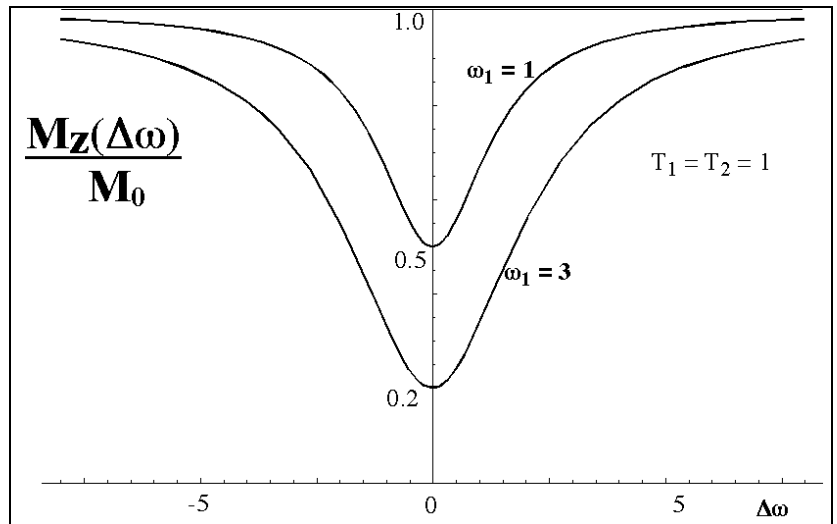
$$M_{z\infty} = M_0 [1 - 1] = 0 ,$$

d.h. die longitudinale Magnetisierung verschwindet. Man bezeichnet dies als Sättigung.

Verstimmungsabhängigkeit: Die z-Magnetisierung wird minimal für resonante Einstrahlung. Der Wert hängt von der Stärke der RF-Einstrahlung ab. In der Figur ist die Abhängigkeit von der Resonanzverstimmung $\Delta\omega$ für die folgenden Parameter dargestellt:

$T_2 = 1, T_1 = 1, \omega_1 = 1.0$ und 3.0 .

Die Verstimmungsabhängigkeit dieser Funktion gibt uns somit die Form der Absorptionslinie. Man erkennt leicht, dass die Funktion ihr Maximum erreicht, wenn die Verstimmung verschwindet, $\Delta\omega = 0$.



Die Breite der Resonanzlinie kann aus der obigen Form leicht bestimmt werden: Die Abweichung von 1 nimmt auf die Hälfte ab, wenn $\Delta\omega^2 T_2^2$ gleich groß wird wie die beiden andern Terme. Dies bedeutet, dass für niedrige RF-Leistung, $\omega_1^2 T_1 T_2 \ll 1$, die Halbwertsbreite gerade durch die transversale Relaxationszeit gegeben ist, $\Delta\omega_{1/2} = 1/T_2$. Für höhere Leistungen erhält man eine Leistungsverbreiterung:

$$\Delta\omega_{1/2} = (1/T_2^2 + \omega_1^2 T_1/T_2)^{1/2} .$$

3.3.2 Absorbierte Leistung

Die Energiedichte der Magnetisierung ist gegeben durch

$$\mathcal{E}_{\text{mag}}/V = - \vec{M} \cdot \vec{B} = - M_z B_0 .$$

Somit ist die z-Komponente der Magnetisierung ein Maß für die Energie des Systems.

Bei der Einführung der Relaxation hatten wir erwähnt, dass die Differenz $M_z - M_0$ mit der Zeitkonstante T_1 zerfällt, indem sie Energie mit dem Gitter austauscht. Im stationären Fall muss somit die absorbierte Leistung proportional sein zu

$$P \sim B_0 (M_z - M_0)/T_1 = B_0 M_0 \left(\frac{\omega_1^2 T_2}{1 + \Delta\omega_0^2 T_2^2 + \omega_1^2 T_1 T_2} \right) .$$

Der Term in Klammern verschwindet für kleine RF Leistungen oder große Verstimmungen. Der Maximalbetrag für große Leistungen ($\omega_1^2 T_1 T_2 \gg 1, \Delta\omega^2 T_2^2$) ist offenbar

$$\boxed{\mathbf{Z}: M_z - M_0 (\Delta\omega)}$$

$$P_{\text{max}} \sim B_0 M_0 / T_1 .$$

Unter diesen Bedingungen verschwindet M_z , d.h. das System ist vollständig gesättigt.

3.3.3 Messung von Absorption und Dispersion

Die transversalen Komponenten beschreiben Absorption und Dispersion des Mediums. Ihr Einfluss auf das detektierte Signal kann direkt aus dem Faraday'schen Induktionsgesetz hergeleitet werden:

Die Spannung über einer Leiterschleife ist

$$V(t) = d\Phi/dt = d/dt \left(\int_{\text{Spule}} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dA \right),$$

wobei Φ den magnetischen Fluss durch die Schleife darstellt.

Im vorliegenden Fall ist die Schleife gegeben durch die Windungen der RF Spule. Die transversalen Komponenten der Magnetisierung liefern einen Beitrag zur magnetischen Induktion

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}).$$

Der Fluss durch die Spule wird bestimmt durch die x-Komponente, d.h.

$$B_x = \mu_0 (H_x + M_x).$$

Der Beitrag der Magnetisierung zur Spannung ist somit proportional zu

$$V(t) \sim dM_x/dt = -\omega M_y.$$

Da diese Messung im Laborsystem durchgeführt wird, müssen wir auch die Komponenten im Laborsystem berechnen, während die oben berechneten stationären Lösungen der Blochgleichung im rotierenden Koordinatensystem berechnet wurden. Durch die Transformation ins Laborsystem erhalten wir Beiträge von beiden transversalen Komponenten

$$V(t) \sim -\omega_0 M_y = -\omega_0 (M_{y\infty} \cos(\omega t) + M_{x\infty} \sin(\omega t)).$$

Die beiden stationären Komponenten erscheinen somit als Quadraturkomponenten des Signals.

3.3.4 Transversale Komponenten

Die transversale Magnetisierung kann geschrieben werden als

$$(M_x, M_y)_\infty = (\Delta\omega \omega_1 T_2^2, \omega_1 T_2) / (1 + T_2^2 \Delta\omega^2 + \omega_1^2 T_1 T_2).$$

In dieser Darstellung sind alle Terme dimensionslos. Offenbar beträgt der Gleichgewichtswert für große Verstimmung Null, da hier der Verstimmungsterm im Nenner dominiert. Allerdings fällt die x-Komponente mit $1/\Delta\omega$ ab, die y-Komponente mit $1/\Delta\omega^2$.

Das Verhalten bei der Resonanz ist jedoch für die

Z: Absorption / Dispersion

beiden Terme unterschiedlich: Die x-Komponente, welche im Zähler proportional zu $\Delta\omega$ ist, weist auf der Resonanz einen Nulldurchgang auf, während die y-Komponente hier ihr Maximum erreicht.

Die beiden Kurven zeigen offenbar qualitativ das gleiche Verhalten wie im Falle des klassischen harmonischen Oszillators. Für kleine Intensitäten,

$$\omega_1^2 \ll 1/T_1 T_2, \Delta\omega^2 T_2/T_1,$$

erhalten wir das bekannte Lorentzprofil der Breite $1/T_2$. Der dritte Term im Nenner beschreibt den Effekt einer Leistungsverbreiterung, also einer Verbreiterung der Resonanzlinie bei hohen Leistungen.

Die Figur zeigt die Abhängigkeit aller drei Komponenten der Magnetisierung von der normierten Verstimmung $\delta = \Delta\omega T_2$.

