

# 6 Nichtklassisches Licht

## 6.1 Einleitung

### 6.1.1 Übersicht und Motivation

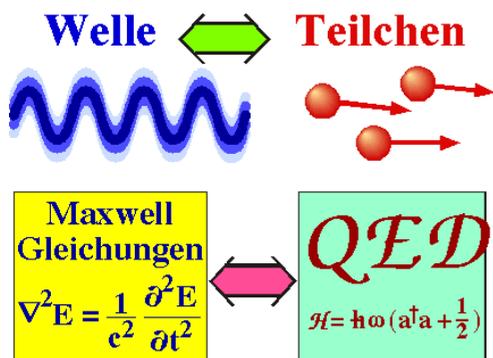


Abbildung 6.1: Nichtklassische Aspekte des Lichtes.

Im größten Teil der Vorlesung wurde Licht als klassisches elektromagnetisches Feld diskutiert, dessen Ausbreitung mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen beschrieben werden kann. Seit Planck ist aber bekannt, dass diese Beschreibung nicht vollständig ist. Während die Arbeiten von Planck und Einstein zur Wechselwirkung von Licht mit Materie die ersten Schritte für die Entwicklung der Quantenmechanik bildeten wurde die ausformulierte Quantenmechanik von Schrödinger und Heisenberg zunächst auf massive Teilchen angewendet. Erst in den 1940er Jahren entwickelten Richard Feynman, Freeman Dyson, Julian Schwinger und Sin-Itiro Tomonaga eine Quantentheorie des Lichtes, die Quanten-Elektrodynamik (QED). Diese ist inzwischen die am genauesten getestete physikalische Theorie. Sie beschreibt Phänomene auf einem extremen Bereich von Größenskalen (von Subatomare bis zur Größe des Universums).

Für die weitaus meisten optischen Phänomene geben die Maxwell-Gleichungen eine völlig kor-

rekte Beschreibung und man benötigt die QED nicht. Der Photoeffekt und die Schwarzkörperstrahlung gehören zu den wenigen Ausnahmen. Allerdings nimmt die Zahl der beobachtbaren Phänomene, für deren Erklärung man die QED benötigt, seit der Entwicklung des Lasers stark zu und inzwischen sind auch technische Anwendungen wie die Telekommunikation in einen Bereich gelangt, wo diese Effekte relevant werden.

In diesem Kapitel sollen diese Phänomene kurz vorgestellt und diskutiert werden.

### 6.1.2 Historische Entwicklung

In einem etwas weiteren Rahmen ist dies eine Fortführung der Diskussion über die Natur des Lichtes, welche Wissenschaftler und Philosophen seit Jahrhunderten beschäftigt. Insbesondere gab es einen langen Streit, ob Licht eine Welle sei, oder aus einen Strom von Teilchen bestehe.

Schon im 17. Jhd. wurden die ersten optischen Beugungsexperimente durchgeführt, welche eigentlich auf eine Wellennatur hindeuteten. Auch Newton beschäftigte sich intensiv mit der Frage. Er erklärte unter anderem die unterschiedlichen Farben des Lichtes mit einer Theorie, welche Wellen- und Teilchenaspekte mischte. Unterschiedliche Farben entsprachen bei ihm unterschiedlichen Teilchen, welche den Äther in Schwingungen versetzten. Dabei war er starken Angriffen von Hooke ausgesetzt, so dass seine Arbeit (Opticks) erst ein Jahr nach Hookes Tod publiziert wurde.

Der Wellenaspekt trat bei Newton später aber in den Hintergrund, und der Teilchenaspekt wurde stärker gewichtet. Auch die praktisch zeitgleich entstandene Arbeit von Huygens (eine Wellentheorie) wurde weniger stark beachtet. Euler, und vor allem Young und Fresnel griffen die Wel-

## Welle oder Teilchen ?

### Robert Hooke (1635-1703)

Beobachtet Interferenz und Beugung; Wellentheorie

### Isaac Newton (1642-1727)

Teilchentheorie mit WellenASPEKTEN

### Thomas Young (1773-1829)

### Augustin Jean Fresnel (1788-1827)

Wellentheorie erklärt Interferenzeffekte

### James Clerk Maxwell (1831-1879)

Elektrodynamik: Ausbreitung elektromagnetischer Wellen

### Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858-1947)

1900: Erklärung der Schwarzkörperstrahlung mit Hilfe von 'Lichtquanten'

### Albert Einstein (1879-1955)

1905: Erklärung des photoelektrischen Effekts mit Hilfe von 'Lichtquanten'. Ab 1926 werden diese als 'Photonen' bezeichnet (G.N. Lewis).

Abbildung 6.2: Welle oder Teilchen in der historischen Entwicklung.

lentheorie wieder auf. Es gelang ihnen, Interferenz und Beugung damit zu erklären. Ihre größte Schwierigkeit war, dass damals nur Longitudinalwellen, v.a. Schallwellen, bekannt waren, also skalare Wellen. Damit war es aber nicht möglich, Polarisierungseffekte zu erklären, welche im 18. u. 19. Jahrhundert intensiv untersucht wurden. Mit dem Hinweis auf die Autorität Newton wurden sie deshalb heftig angegriffen. Die eigentlichen theoretischen Grundlagen für die Beschreibung des Lichtes als elektromagnetische Welle wurden dann von Maxwell geschaffen, und Faraday und Hertz konnten zeigen, dass Licht als elektromagnetische Welle verstanden werden kann.

Die Maxwell Theorie hatte aber auch Schwierigkeiten, vor allem bei der Beschreibung der Wechselwirkung mit materiellen Systemen. Ein wichtiges Beispiel ist die sogenannte Abhängigkeit der von einem schwarzen Strahler emittierten Leistung als Funktion von Temperatur und Wellenlänge. Im 19. Jh. war es nicht möglich, die gemessene Verteilung mit einem theoretischen Modell in Übereinstimmung zu bringen. Planck löste dieses Problem, indem er postulierte, dass die

Energie der Strahlung nicht kontinuierlich emittiert werde. Diese Annahme wurde auch von Einstein bei der Erklärung des photoelektrischen Effektes verwendet.

### 6.1.3 QED: Moden und Energie

Die quantenmechanische Theorie, welche das Verhalten des Lichtes befriedigend erklären kann, ist die Quantenelektrodynamik. Grundlage der QED ist eine Zerlegung des Feldes in Moden. Die Form der Moden wird durch die Randbedingungen bestimmt; beim Laser z.B. sind es Resonatorspiegel, welche die Randbedingungen definieren. Um Probleme im freien Raum zu diskutieren kann man die Schranken nach Unendlich laufen lassen. Wir diskutieren hier der Einfachheit halber eine ebene Welle, wobei das E-Feld in  $x$ -Richtung und das  $H$ -Feld in  $y$ -Richtung polarisiert sei:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_z z)} \\ \vec{H} &= H_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_z z)} \\ &= E_0 \frac{k_z}{\mu_0 \omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_z z)}.\end{aligned}$$

Die Energiedichte eines solchen Feldes ist bekanntlich

$$w = \frac{1}{2}(\epsilon_0 E_0^2 + \mu_0 H_0^2).$$

Unter Verwendung des Korrespondenzprinzips erhält man daraus den Hamiltonoperator

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int_V dV (\epsilon_0 E_0^2 + \mu_0 H_0^2).$$

Die Proportionalität der zeitlichen Ableitung von  $E$  mit  $H$  in den Maxwell Gleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

legt nahe, im Hamiltonoperator folgende Identifizierung vorzunehmen:

$$\int_V dV (\epsilon_0 E_0^2) = \Omega^2 q^2$$

$$\int_V dV (\mu_0 H_0^2) = p^2.$$

Damit wird

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\Omega^2 q^2 + p^2),$$

formal somit identisch zu einem harmonischen Oszillator.

### 6.1.4 QED: Operatoren

Jede Mode des elektromagnetischen Feldes entspricht somit einem harmonischen Oszillator. Im Rahmen der QED beschreibt man diese meist nicht mit Ort und Impuls, sondern man verwendet Linearkombinationen davon: Den Vernichtungsoperator

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\Omega}}(\Omega q + ip)$$

und den Erzeugungsoperator

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\Omega}}(\Omega q - ip).$$

Die Namen "Erzeugungs-" und "Vernichtungsoperator" beziehen sich darauf, dass

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle,$$

d.h. dass  $a$  die Zahl der Photonen in der Mode um 1 reduziert. Umgekehrt gilt

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle,$$

d.h.  $a^\dagger$  erzeugt ein zusätzliches Photon.  $|n\rangle$  ist ein sogenannter Zahlzustand, d.h. ein Zustand mit genau  $n$  Photonen in der Mode. Man verifiziert leicht dass

$$a^\dagger a|n\rangle = \sqrt{n}\sqrt{n}|n\rangle = n|n\rangle.$$

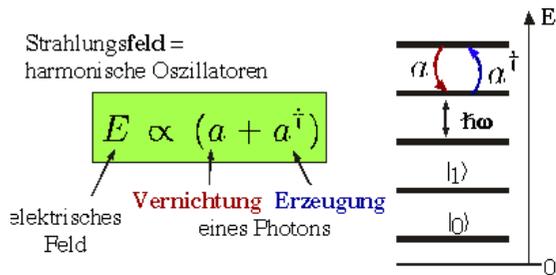


Abbildung 6.3: QED: Mode des Strahlungsfeldes als harmonischer Oszillator.

Mit Hilfe des Erzeugungs- und Vernichtungsoperators kann der Hamiltonoperator geschrieben werden als

$$\mathcal{H} = \hbar\Omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}) = \hbar\Omega(n + \frac{1}{2}).$$

Jede Mode des Feldes entspricht einem harmonischen Oszillator, wobei die Oszillatorfrequenz durch die Schwingungsfrequenz des Feldes gegeben ist. Dementsprechend ist die Energie des niedrigsten Zustandes ( $n = 0$ )  $\hbar/2$ . Diese Nullpunktenergie kann dem Feld zwar nicht entzogen werden, hat aber doch beobachtbare Auswirkungen. Der Zahloperator misst die Zahl der elementaren Anregungen, welche als Photonen bezeichnet werden. Pro Photon besitzt die Mode die Energie  $\hbar\Omega$ .

Aus der Definition der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren folgt, dass die Feldstärke der Mode proportional zur Summe von Erzeugungs- und Vernichtungsoperator ist,

$$E \propto (a + a^\dagger).$$

### 6.1.5 QED vs. Maxwell

Die Quanten-Elektrodynamik ist inzwischen eine der am genauesten überprüften physikalischen Theorien überhaupt. Bisher hat man noch keine Widersprüche zwischen ihren Voraussagen und experimentell beobachteten Resultaten gefunden. Die meisten Arbeiten auf dem Bereich der Optik werden aber nach wie vor mit theoretischen Modellen beschrieben, welche auf den klassischen Maxwell Gleichungen basieren. Es gibt

somit einen Bereich der Optik, in dem die Maxwell-Gleichungen die beobachteten Phänomene sehr genau wiedergeben. Wir wissen aber auch, dass die klassische Theorie nicht den ganzen Bereich abdeckt, sondern dass es auch einen Bereich gibt, wo die Beobachtungen nur noch quantenmechanisch erklärt werden können.

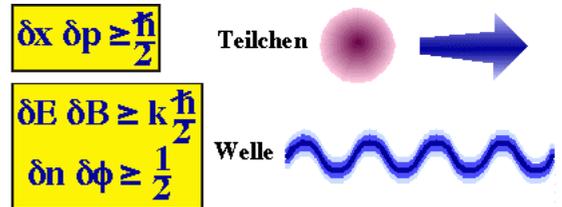
Die wesentlichste Schwierigkeit der QED liegt in der Tatsache, dass das zu behandelnde System streng genommen immer eine unendlich große Dimension hat, da ja jedes Teilchen auch an das Kontinuum aller Moden des Strahlungsfeldes gekoppelt ist. Wegen der Nullpunktenergie des Strahlungsfeldes kann diese Wechselwirkung nicht einfach vernachlässigt werden, nicht einmal wenn keine Photonen vorhanden sind, also wenn sich das Feld im Vakuumzustand befindet. Um dennoch etwas rechnen zu können, muss jeweils eine gute Näherung gefunden werden. Bei der Elimination der Nullpunktenergie des Strahlungsfeldes bleiben dabei einige Reste zurück, wie die spontane Emission, Änderungen im magnetischen Moment des Elektrons oder Verschiebungen der Energien von atomaren Zuständen. Bei dieser Reduktion geht auch die Eichinvarianz der Theorie verloren (W.E. Lamb, R.R. Schlicher, and M.O. Scully, Phys. Rev. A 36, 2763 (1987)).

In diesem Kapitel soll die Frage untersucht werden wo denn die Grenze verläuft, jenseits welcher nur noch die Quantenmechanik eine befriedigende Erklärung der Phänomene liefert. Das Interesse an dieser Fragestellungen ist zum einen natürlich grundsätzlicher Natur. Andererseits sind durch die raschen Fortschritte, welche optische Methoden seit der Entwicklung des Lasers gemacht haben, viele Messverfahren in einem Bereich angelangt, wo die quantenmechanische Natur des Lichtes beobachtbare Konsequenzen hat. Kenntnisse über diese Unterschiede, werden deshalb zunehmend wichtiger. Optische Interferometer, z.B., welche für die exakte Messung von Distanzen benutzt werden oder in der Form von Lasergyroskopen als Beschleunigungssensoren benutzt werden, arbeiten heute an der Schrottauschgrenze, also in einem Bereich, wo die

Empfindlichkeit dieser Geräte an fundamentale Grenzen stößt. Eine Weiterentwicklung ist somit nur möglich, wenn dabei die quantenmechanische Natur des Lichtes berücksichtigt wird. Das gleiche gilt für die kohärente optische Datenübertragung.

### 6.1.6 Unschärfe

Die grundlegendsten Unterschiede zwischen der klassischen und der quantenmechanischen Theorie gehen auf die Unschärfenbeziehung zurück.



#### Beispiel: Beugung am Spalt

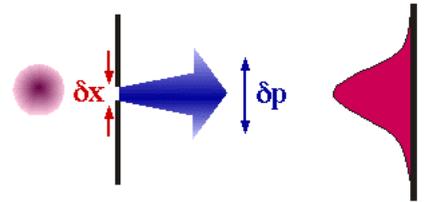


Abbildung 6.4: Unschärfe

In der QED ist das elektromagnetische Feld ein Operator, welcher der Heisenberg'schen Unschärfenbeziehung unterliegt. Somit haben die Felder keinen scharfen Wert, sondern sind mit Unsicherheiten, resp. Unschärfen behaftet, wie Ort und Impuls eines Teilchens:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Für elektromagnetische Wellen gelten Unschärferelationen insbesondere für das Produkt zwischen elektrischem und magnetischem Feld,

$$\Delta E \Delta H \geq \text{const.} \frac{\hbar}{2}.$$

Eine analoge Beziehung kann man formulieren zwischen den Quadraturamplituden oder zwischen Amplitude (Photonenzahl) und Phase.

Außerdem ist die Quantenelektrodynamik, wie alle quantenmechanischen Theorien, nicht lokal; so existieren z.B. Zustände des Strahlungsfeldes, bei denen Korrelationen zwischen räumlich getrennten Photonen auftreten.

Grundsätzlich ist es in der Quantenmechanik häufig möglich, die entsprechende klassische Theorie als Grenzfall für große Quantenzahlen wieder zu erhalten. In diesem Fall entspricht der Grenzfall demjenigen von großen Photonenzahlen, also hohen Intensitäten. Für diesen Grenzfall erhält man in diesem Fall die Maxwell Gleichungen. Diese Näherung wird im allgemeinen um so besser, je niedriger die Frequenz, also je niedriger die Photonenenergie wird.

### 6.1.7 Zustände einer Mode

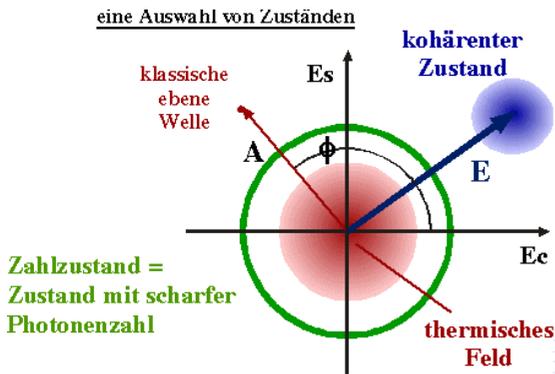


Abbildung 6.5: Zustände einer Mode

Die Zustände, welche zu diesem Hamiltonoperator gehören, können in der komplexen Ebene dargestellt werden. Entlang den beiden Achsen trägt man die Quadraturamplituden des elektrischen Feldes auf, also diejenigen Komponenten, welche mit dem  $\cos$ , resp.  $\sin$  der Referenzfrequenz schwingen. Äquivalent ist die Polardarstellung mit Amplitude und Phase.

In dieser Darstellung entspricht ein klassischer Zustand, bei dem Amplitude und Phase scharf bestimmt sind, einem Punkt. Quantenmechanisch würde ein Punkt jedoch die Heisenbergbeziehung verletzen. Hier entspricht die Unschärfe eines Zustandes der Fläche in der komplexen

Ebene. Die Heisenberg Beziehung legt die minimale Größe dieser Fläche fest.

Prinzipiell ist es aber auch möglich, Zustände mit scharfer Photonenzahl, sogenannte Fock-Zustände, zu erzeugen. Diese sind Eigenzustände des Hamiltonoperators und haben somit eine scharfe Energie - im Bild entsprechen sie einem Kreis, d.h. in diesem Fall ist die Intensität scharf, aber die Phase ist vollständig unbestimmt.

Weitere mögliche Zustände sind z.B. ein thermischer Zustand, bei dem also die Population der einzelnen Zustände durch eine thermische Verteilung gegeben ist. In diesem Fall beträgt die Wahrscheinlichkeit,  $n$  Photonen zu messen

$$P_{th}(n) = \frac{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}{e^{-n\frac{\hbar\omega}{kT}}}.$$

Die Breite der Verteilung ist gleich ihrem Mittelwert:  $\sigma^2 = \bar{n}^2 + \bar{n}$ . Wie in der Figur angedeutet ist die Phase eines thermischen Zustandes nicht bestimmt. Damit verschwindet auch der Erwartungswert für die Amplitude, nicht aber für die Energie.

### 6.1.8 Kohärente Zustände

Aufgrund der quantenmechanischen Unschärfebeziehung ist es nicht möglich, Zustände zu erzeugen, bei denen das elektromagnetische Feld scharf definiert ist und die sich somit verhalten wie von der klassischen Theorie vorausgesagt. Es gibt aber eine Klasse von Zuständen, deren Eigenschaften denjenigen klassischer Zustände relativ nahe kommen. Dabei handelt es sich um symmetrische Zustände, d.h. um Zustände, bei denen die Unschärfe gleichmäßig auf die beiden Quadraturkomponenten verteilt ist; in der hier verwendeten Darstellung in der komplexen Ebene sind dies Zustände somit rund. Außerdem entspricht ihre Unschärfe gerade dem quantenmechanischen Minimum.

Diese Zustände wurden erstmals von Roy Glauber beschrieben und können in der Basis der

Zahl- oder Fock Zustände als eine Reihe entwickelt werden:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

Der Parameter  $\alpha$  ist komplex und definiert das Zentrum der Feldverteilung in der komplexen Ebene. Die Feldverteilung ist symmetrisch und das Produkt der Unschärfen entspricht gerade dem Gleichheitszeichen der Heisenberg Beziehung, also dem quantenmechanischen Minimum.

Die Feldverteilung und die Photonenstatistik für kohärente Zustände können mit den entsprechenden Funktionen für thermische Lichtfelder verglichen werden. Dort ist die mittlere Amplitude null, und die häufigste Photonenzahl ist ebenfalls null - beides für kurze Messintervalle. Der wesentliche Unterschied ist offenbar der, dass ein kohärenter Zustand einen nicht verschwindenden Erwartungswert für die Quadraturamplituden hat, während diese für einen sogenannten chaotischen Zustand, wie er von einer thermischen Lichtquelle erzeugt wird, verschwinden. Noch in einem weiteren Sinn gleicht der kohärente Zustand einem klassischen Feld: die Intensitäten an unterschiedlichen Orten, resp. Zeiten sind statistisch unabhängig. Diese Eigenschaft wurde von Glauber für die Definition der kohärenten Zustände verwendet.

Kohärente Zustände sind aus verschiedenen Gründen wichtig: zum einen erzeugt ein idealer Laser weit oberhalb der Laserschwelle Licht, welches in guter Näherung durch einen kohärenten Zustand beschrieben werden kann. Betrachten wir lediglich den Schwerpunkt, d.h. den Erwartungswert des Zustandes, so verhält sich ein kohärenter Zustand klassisch: Die Bewegung des Schwerpunktes kann durch die Maxwellgleichungen beschrieben werden.

Die Fläche, welche die Amplitudenunschärfe darstellt, ist unabhängig von der Position in der Ebene der Zustände. Dies zeigt, dass diese quantenmechanischen Effekte auch für große Amplituden überleben. Dass der Vakuumzustand auch

als kohärenter Zustand ( $\alpha \rightarrow 0$ ) verstanden werden kann, ist deshalb wichtig, weil bei einer Aufteilung an einem Strahlteiler i.a. der Vakuumzustand zugemischt wird. Dadurch wird ein einfallender kohärenter Zustand mit einem anderen kohärenten Zustand überlagert und die beiden auslaufenden Zustände stellen wiederum einen kohärenten Zustand dar.

## 6.2 Photonenstatistik

### 6.2.1 Phänomenologie

Die quantenmechanische Unschärfe macht sich auf unterschiedliche Art bemerkbar. Wir betrachten zunächst die Unschärfe der Intensität, welche wir über Schwankungen in der Photonenzahl quantifizieren.

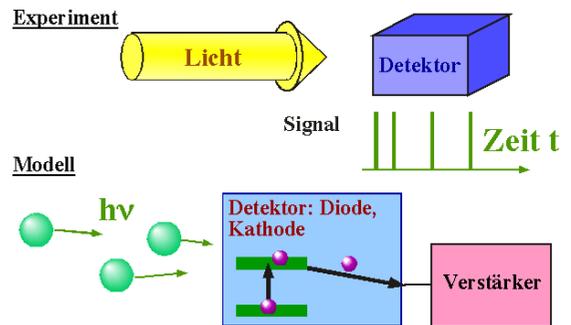


Abbildung 6.6: Intensitätsmessung als Photonenstatistik.

Dazu betrachten wir den Prozess einer Intensitätsmessung etwas genauer. Quantenmechanische Unschärfe manifestiert sich dann besonders stark wenn die Intensität gering ist. Ein passendes Modell wäre dann dass ein Lichtstrahl auf einen Photomultiplier fällt. Dort wird pro einfallendem Photon ein Elektron aus einem tiefliegenden quantenmechanischen Zustand in einen höher liegenden Zustand angehoben, z.B. aus dem Valenzband eines Halbleiterdetektors ins Leitungsband oder aus dem Leitungsband einer Photokathode ins Vakuum. Von dort wird es abgeleitet und elektronisch verstärkt.

In einem halbklassischen Modell kann man nicht voraussagen, zu welchem Zeitpunkt ein Photon auf dem Detektor eintrifft, d.h. wann ein Elektron freigesetzt wird. Man kann lediglich aussagen wie groß der mittlere Abstand zwischen zwei Photonen ist. Für einen Laserstrahl mit 1 pW Leistung und einer Wellenlänge von 532 nm, z.B., treffen pro Sekunde

$$N = \frac{E}{h\nu} = \frac{E\lambda}{hc} = \frac{10^{-12} \text{ J } 5.32 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{6.62 \cdot 10^{-34} \text{ Js } 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}}$$

$$= 2.7 \cdot 10^6$$

Photonen ein. Der mittlere Abstand beträgt somit 0.370  $\mu\text{sec}$ .

### 6.2.2 Poissonverteilung

Diese Wahrscheinlichkeit ist unabhängig davon ob unmittelbar vorher ein Photon eingetroffen ist oder nicht, d.h. die einzelnen Photonen sind statistisch unabhängig voneinander. Dies gilt natürlich nur für ein Lichtfeld, das keine klassischen Schwankungen aufweist.

Die präziseste mögliche Art der Intensitätsmessung ist eine Zählung der Anzahl Photonen pro Zeiteinheit. Diese Zahl ist eine Zufallsvariable, und die Quantenmechanik erlaubt nur statistische Aussagen über ihre Messung. Für eine gegebene Messzeit und Intensität kann die mittlere Photonenzahl nach obiger Rechnung bestimmt werden. Wiederholt man die Messung mehrfach, so findet man nicht immer den gleichen Wert, sondern eine Verteilung. Wie in der Kombinatorik gezeigt wird, ist die relevante Verteilung die Poisson-Verteilung

$$p(n; k) = e^{-k} \frac{k^n}{n!}.$$

Hier stellt  $k$  den Erwartungswert, d.h. die mittlere Zahl von Photonen für das gegebene Messintervall dar und  $n$  die effektiv gemessene Zahl von Photonen.

In der Figur ist die Verteilung für zwei unterschiedliche Erwartungswerte gezeigt.

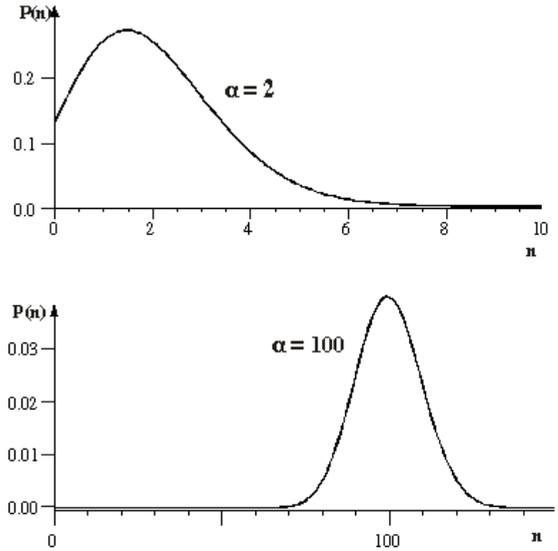


Abbildung 6.7: Poisson Statistik.

Eine solche Verteilung erhält man gerade für einen kohärenten Zustand

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

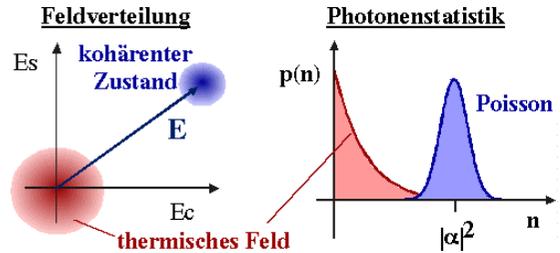


Abbildung 6.8: Phasenraumdarstellung und Photonenstatistik für kohärente Zustände.

Damit wird die Wahrscheinlichkeit, im gegebenen Messintervall für diesen Zustand gerade  $n$  Photonen zu messen

$$p(n) = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!},$$

d.h. sie ist durch die Poissonverteilung gegeben. Hier stellt  $|\alpha|^2$  den Erwartungswert dar, also die mittlere Photonenzahl. Die Breite der Verteilung ist proportional zu  $|\alpha|$  und damit zur Wurzel aus

der mittleren Photonenzahl, wie bei einem klassischen Feld. Für große Mittelwerte geht sie in die Gaussverteilung mit Mittelwert  $|\alpha|^2$  und Breite (FBHH)  $\sqrt{2\alpha}$  über.

Die Unschärfe der Intensität (Photonenzahl) ist analog zu den elektrischen Schwankungen in einer elektronischen Schaltung, welche auf die diskrete Natur der Ladungsträger (Elektronen) zurückgeführt werden. In beiden Fällen spricht man vom Schrotrauschen. Die physikalische Ursache ist in beiden Fällen die Quantisierung - im Falle der Elektronik die Ladungsquantisierung, im Falle des Lichtes die Quantisierung der elektromagnetischen Energie.

Die Verteilung ist das Resultat der Annahme, dass die Photonen statistisch voneinander unabhängig sind. Die Unmöglichkeit, über den Zeitpunkt des Eintreffens der Photonen etwas auszusagen ist nicht auf experimentelles Unvermögen zurückzuführen, sondern es ist prinzipiell unmöglich, etwas darüber auszusagen - jedenfalls im Rahmen dieses halbklassischen Modells, wo die Ausbreitung des Lichtes mit Hilfe der Maxwell Gleichungen beschrieben wird: bei der Ausbreitung kommen ja keine Photonen vor, diese entstehen ja - immer im Rahmen dieses Modells - erst bei der Wechselwirkung mit dem Detektor. Das gleiche Resultat erhalten wir für einen kohärenten Zustand: dessen Photonenstatistik ist identisch zu derjenigen des (zeitunabhängigen) klassischen Feldes. Die Annahme, dass die Photonen statistisch unkorreliert seien, war der Ausgangspunkt für Roy Glauber für die "Konstruktion" der Zustände.

Bei der Herleitung sind wir weiter davon ausgegangen dass das klassische Feld absolut stabil sei, dass also während der Messzeit keine Intensitätsschwankungen auftreten. Bei einem realen Feld sind Intensitätsschwankungen unvermeidlich. Sie führen zu einer Verbreiterung der gemessenen Verteilung gegenüber der Poissonverteilung. Die Breite der Poissonverteilung stellt somit eine untere Grenze dar für die gemessenen Schwankungen eines klassischen Feldes.

### 6.2.3 Intensitätskorrelation

Eine andere statistische Analyse der Photonverteilung ist die Intensitäts-Korrelationsfunktion.

$$\langle I(t) I(t + \tau) \rangle,$$

wobei die eckigen Klammern bedeuten, dass über alle Zeiten  $t$  gemittelt wird. Bei einer idealen ebenen Welle ist die Intensität und damit auch deren Korrelationsfunktion konstant. Dies bedeutet, dass die Photonen unabhängig voneinander beim Detektor eintreffen, also einer Poisson-Statistik folgen, und damit die Abstände zwischen den einzelnen Photonen schwanken. Experimentell erzeugtes Licht weist aber auch im klassischen Bereich immer gewisse Intensitätsschwankungen auf. Solche Intensitätsschwankungen führen zu einer Korrelation der Intensitäten für kurze Zeiten.

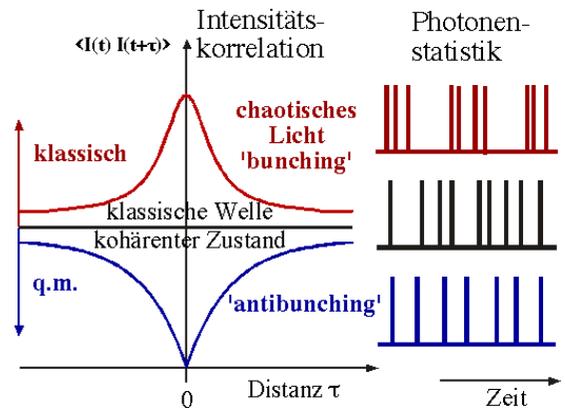


Abbildung 6.9: Intensitätskorrelationen.

Neben diesen "experimentellen Fehlern" gibt es aber auch quantenmechanische Ursachen für positive Intensitätskorrelationen. Im Photonbild entspricht eine positive Intensitätskorrelationsfunktion einer Tendenz der Photonen in Paaren einzutreffen; man spricht von "bunching". Auf ein Stichwort zusammengefasst ist die Ursache dafür die Bosonnatur der Photonen: Auf einer sehr kurzen Zeitskala betrachtet wird die Photonstatistik durch eine Bose-Einstein Verteilung beschrieben.

Eine statistische Analyse der Korrelationsfunktion im Rahmen eines halbklassischen Modells ergibt, dass die normierte Korrelationsfunktion

$$g^{(2)} = \frac{\langle I(t) I(t + \tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle^2}$$

für kurze Zeiten durch Mittelwert  $\bar{n}$  und Varianz  $\sigma^2$  der Photonenzahl beschrieben werden kann:

$$g^{(2)}(0) = 1 + \frac{\sigma^2 - \bar{n}}{\bar{n}^2}.$$

Bei einem thermischen Feld, wo  $\sigma^2 = \bar{n}^2 + \bar{n}$  wird somit  $g^{(2)}(0) = 2$ . Die Korrelationsfunktion fällt auf den Wert 1 ab für größere Zeiten, wobei die Korrelationszeit durch die inverse Linienbreite gegeben ist.

Im Gegensatz zu thermischem Licht ist bei kohärentem Licht  $\sigma^2 = \bar{n}$  und somit  $g^{(2)}(0) = 1$ . Die Intensitäts-Korrelationsfunktion ist somit zeitenunabhängig - wiederum ein Resultat der statistischen Unabhängigkeit der Photonen. Die statistischen Eigenschaften des kohärenten Zustandes sind somit wieder die gleichen wie bei einer idealen klassischen ebenen Welle. Im Rahmen eines klassischen Bildes ist es offensichtlich dass die Funktion  $g^{(2)}$  nie weniger als 1 betragen kann, da sämtliche Variationen der Intensität zu "bunching" Effekten führen, also zu positiven Abweichungen. Der Bereich unterhalb der Geraden ist somit "klassisch verboten".

### 6.2.4 Antibunching

In der Quantenmechanik sind Zustände mit  $g^{(2)} < 1$  möglich. Das entspricht also dem Fall, dass die Photonen in gleichmäßigeren Zeitintervallen eintreffen, als man aufgrund einer Poissonverteilung erwarten würde. Bezogen auf die Intensitätsverteilung heißt das, dass man für kurze Zeiten eine Antikorrelation beobachtet: ein regelmäßiges Eintreffen bedeutet ja, dass kurz nach einem gemessenen Photon die Chance sehr klein ist, ein weiteres zu messen. Dieser Effekt wird als 'antibunching' bezeichnet. Er stellt ein weiteres Beispiel für ein elektromagnetisches Feld dar,

welches klassisch nicht beschreibbar ist. Offensichtlich sind in diesem Fall die Photonen nicht unabhängig voneinander, sondern antikorreliert; die Korrelationszeit entspricht der Breite des Loches.

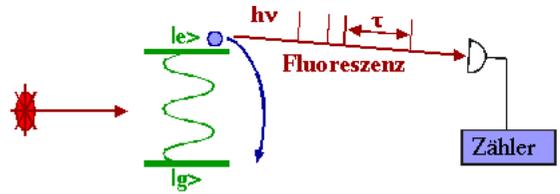


Abbildung 6.10: Fluoreszenzmessung

Zustände mit Antibunching, also Antikorrelation der Photonen erhält man u.a. bei der Resonanz-Fluoreszenz eines einzelnen Atoms. Wenn dieses mit einem Laser resonant angeregt wird, emittiert es spontan Photonen. Die zeitlichen Abstände zwischen diesen Photonen haben eine Verteilung, welche regelmäßiger ist als bei einer klassischen Welle mit konstanter Intensität. Die Wahrscheinlichkeit im Abstand  $\tau$  nach dem letzten Photon wieder eines zu messen, beträgt

$$P(\tau) = 1 - e^{-(\gamma+\Gamma)\tau/2} \cos(R_0\tau).$$

Hier stellt  $\tau$  den Abstand zwischen den Photonen dar,  $R_0$  die Rabi-Frequenz, und  $\gamma + \Gamma$  die Zerfallsrate.

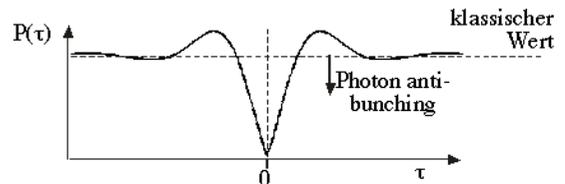


Abbildung 6.11: Antibunching Kurve.

Eine exakte Beschreibung dieses Vorganges müsste natürlich quantenmechanisch erfolgen und ist recht aufwendig. Auf einer qualitativen Ebene kann man aber trotzdem verstehen, wie der Effekt zustande kommt. Damit das Atom ein Photon emittieren kann, muss es sich zunächst im angeregten Zustand befinden. Unmittelbar nach der Emission befindet es sich sicher im Grundzustand und die Wahrscheinlichkeit für die Emission eines weiteren Photons ist somit null. D.h.

ein einzelnes Atom sendet nie kurz hintereinander zwei Photonen aus.

Dieses Verhalten unterscheidet sich also schon einmal grundsätzlich von dem einer klassischen Welle - die Photonen sind demnach nicht unabhängig voneinander, sondern antikorreliert. Die erwartete Korrelationsfunktion ist in der Figur gezeigt: Die Wahrscheinlichkeit, zwei Photonen unmittelbar nacheinander zu messen, strebt für kurze Abstände  $\tau$  gegen null. Für längere Zeiten findet man eine Oszillation, welche im Wesentlichen der Rabi Oszillation entspricht und mit den Zerfallsraten des Übergangs gedämpft ist. Für kurze Zeiten erwartet man also ein antibunching, dazwischen gibt es Bereiche positiver Korrelation. Die Anstiegszeit hier ist direkt ein Maß dafür, wie lange das Atom braucht, um wieder in den angeregten Zustand überzugehen und hängt deshalb von der Stärke des Übergangs sowie von der Laserintensität ab.

### 6.2.5 Experimenteller Nachweis

Bei einem experimentellen Nachweis dieses Effektes besteht das grösste Problem darin, dass mit einzelnen Atomen gearbeitet werden muss, da sonst das Antibunching durch statistische Mittelung verwischt wird.

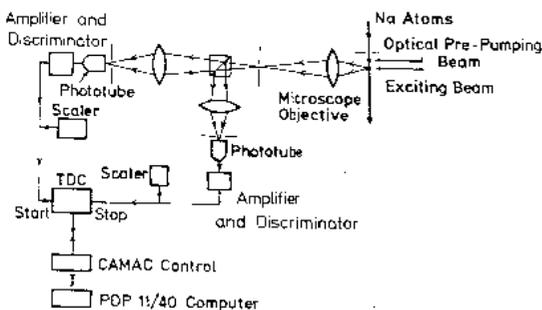


Abbildung 6.12: Experimenteller Aufbau zum Nachweis des Antibunchings in der Resonanzfluoreszenz einzelner Atome.

Dies gelang zum ersten mal der Gruppe von Mandel an der Universität Rochester (H.J. Kim-

ble, M. Dagenais, and L. Mandel, 'Photon Antibunching in resonance fluorescence', Phys. Rev. Lett. 39, 691-695 (1977).). Sie benutzten für ihre Messung einen Atomstrahl mit sehr geringer Intensität. Dadurch wurde es möglich, Messungen durchzuführen, bei denen nur sehr wenige, im Schnitt weniger als ein Atom, gleichzeitig mit dem Laserstrahl in Wechselwirkung trat. Die Fluoreszenzphotonen wurden gesammelt und auf zwei Detektoren geschickt. Die Elektronik diente dann dazu, eine Statistik der zeitlichen Abstände zu erstellen.

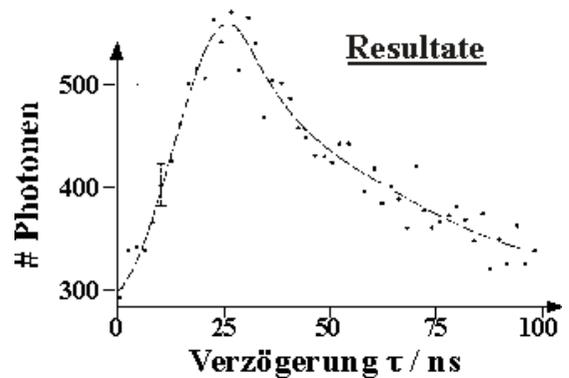


Abbildung 6.13: Experimentelle Photonen-Korrelationsfunktion.

In den experimentellen Resultaten sieht man deutlich das nichtklassische Verhalten für kurze Zeiten, also das antibunching. Für grössere Zeiten sollte die Korrelationsfunktion ja gegen einen konstanten Wert streben, während die experimentellen Daten deutlich abfallen. Hierbei handelt es sich um ein experimentelles Problem: die Atome sind verlassen den Laserstrahl größtenteils innerhalb einer Zeitspanne von weniger als 100 nsec und tragen deshalb nicht mehr zur Fluoreszenz bei. Ein weiteres Problem ist die Zahl der Atome, welche sich zu einem bestimmten Zeitpunkt. In einem Atomstrahl ist diese Zahl nicht konstant, sondern folgt einer Poisson Statistik. Dies führt zu einem teilweisen Auswaschen des Signals.

### 6.2.6 Antibunching an gespeicherten Ionen

Beide Probleme, die statistische Verteilung der Anzahl Atome im Laserstrahl, wie auch die endliche Verweildauer, können umgangen werden, indem nicht mit einem Atomstrahl experimentiert wird, sondern mit einzelnen ionisierten Atomen, welche z.B. in einer Paul Falle aufbewahrt werden. Dadurch kann man erreichen, dass genau 1 Ion für eine praktisch unbegrenzte Zeit zur Verfügung steht. Die Messungen können so mit sehr viel höherer Präzision durchgeführt werden.

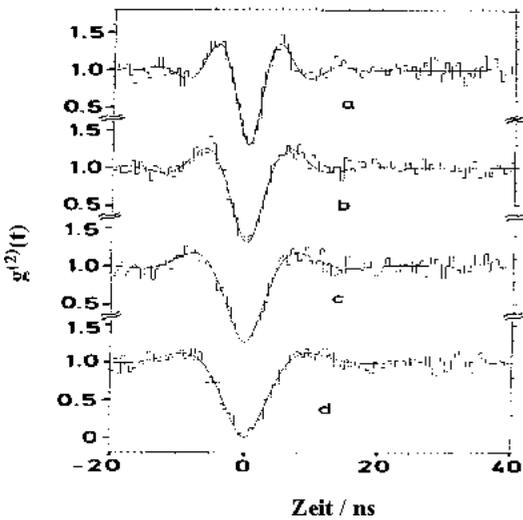


Abbildung 6.14: Antibunching eines gespeicherten Ions.

Messungen dieses Effekts wurden u.a. am MPI für Quantenoptik in Garching bei München durchgeführt. Für dieses Experiment wurde ein einzelnes Barium Atom in einer elektromagnetischen Falle eingefangen und mit einem Laserstrahl angeregt. Die spontan emittierten Photonen wurden gemessen und ihre Korrelationsfunktion gemessen. Die Kurven zeigen die Korrelationsfunktion für eine Reihe unterschiedlicher Laserintensitäten. Man sieht deutlich das antibunching, also die geringe Wahrscheinlichkeit, dass zwei Photonen kurz hintereinander emittiert werden. Auch sonst stimmen die experimentellen Kurven sehr gut mit den gerechneten überein.

Für zunehmende Laser-Intensitäten wird das Antibunching-Loch enger. Dies ist ebenfalls intuitiv leicht verständlich, da es ja dann nach der Emission weniger Zeit braucht, bis das Atom sich wieder im angeregten Zustand befindet und erneut emittieren kann. Mit dem gleichen experimentellen Aufbau konnte auch gezeigt werden, dass die Fluoreszenz sub-Poissonstatistik aufweist. Diese Eigenschaft tritt zwar häufig auf, wenn antibunching vorliegt, ist aber prinzipiell unabhängig davon (R. Short und L. Mandel, Phys. Rev. Lett. 51, 384 (1983).).

### 6.2.7 Einzelmoleküle in Festkörpern

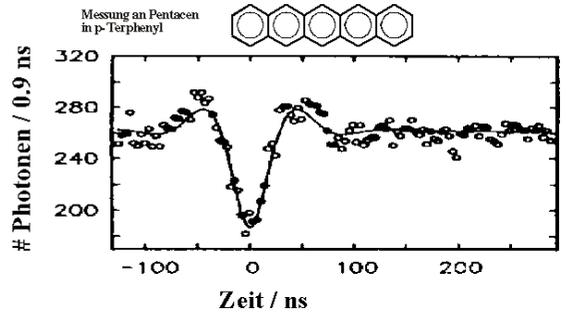


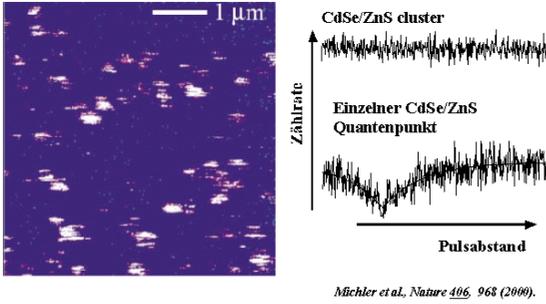
Abbildung 6.15: Antibunching in der Fluoreszenz von Pentacen.

Dieses Phänomen des anti-bunching tritt nicht nur bei Atomen auf, welche sich im Vakuum befinden, sondern genauso bei Molekülen in einem Festkörper (T. Basche, W.E. Moerner, M. Orrit, and H. Talon, 'Photon Antibunching in the Fluorescence of a Single Dye Molecule Trapped in a Solid', Phys. Rev. Lett. 69, 1516-1519 (1992).). Die Messungen wurden an Pentacen durchgeführt, einem aromatischen Molekül, welches eine sehr gute Fluoreszenzausbeute zeigt und damit leicht nachgewiesen werden kann. Das Pentacen-Molekül wurde in eine Matrix aus p-Terphenyl eingebaut, welches einen guten Kristall liefert, der durch die Fremdmoleküle nur wenig gestört wird. Man beobachtet das gleiche Verhalten wie bei den gespeicherten Ionen.

Anstelle von einzelnen Atomen, Ionen oder Molekülen kann man solche Experimente auch mit

”künstlichen Atomen” durchführen. So bezeichnet man Quantenpunkte, also Halbleiterkristalle von wenigen nm Größe.

PL von CdSe/ ZnS quantenpunkten



Michler et al., Nature 406, 968 (2009).

Abbildung 6.16: Lumineszenzbild (links) und Korrelationsmessung (rechts) an CdSe Cluster (oben), resp. an einem einzelnen Quantenpunkt.

Im Falle eines Clusters können viele Anregungen gleichzeitig erzeugt werden. In einem Quantenpunkt jedoch ist nur Platz für eine Anregung. Hier findet man deshalb eine klare Signatur von antibunching.

### 6.2.8 Der Übergang zu vielen Zentren

Diese Experimente zeigen, dass Antibunching ein wesentlicher Bestandteil der Fluoreszenz von einzelnen Atomen oder Molekülen ist. Im Falle einer Fluoreszenzlampe, deren Licht ebenfalls durch Fluoreszenz entsteht, findet man jedoch ein klassisches Bunching. Der Grund dafür liegt nun nicht bei irgendwelchen Unterschieden im Prozess selber, sondern darin, dass Fluoreszenzlampen nicht nur aus einem Atom bestehen, sondern aus einer sehr großen Zahl. Wie dadurch der antibunching Effekt verschwindet wurde sehr schön von Walther und Mitarbeitern gezeigt indem sie Messungen an einer kleinen Zahl von gespeicherten Ionen vornahm. Je größer die Anzahl der Ionen (Atome, Moleküle), die zum Signal beitragen, desto geringer ist der Einfluss der Emission eines einzelnen Photons auf die Besetzungswahrscheinlichkeit. Im Grenzfall vieler Teilchen wird

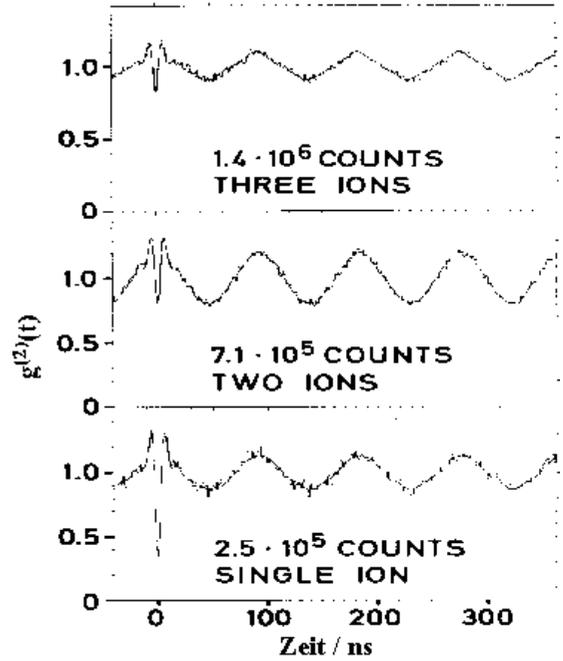


Abbildung 6.17: Abhängigkeit des Antibunching Verhaltens von der Zahl der Ionen.

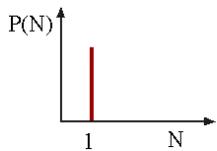
sie nicht mehr beeinflusst. Die einzelnen Photonen werden von verschiedenen Teilchen erzeugt. Sie sind damit unabhängig voneinander und man erhält eine Poisson-Statistik.

## 6.3 Experimente mit einzelnen Photonen

### 6.3.1 Motivation und Grundlagen

Die quantenmechanische Natur des Lichtes wird natürlich dann besonders deutlich, wenn das Feld von genau einem Photon besetzt ist. Um Experimente mit einzelnen Photonen durchführen zu können, kann man aber nicht einfach eine gewöhnliche Lichtquelle verwenden, und diese genügend abschwächen, da durch das ’bunching’, also die Tendenz der Photonen, in Gruppen aufzutreten, die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreffen mehrerer Photonen zu groß wird. Mit chaotischem Licht erhält man deshalb

in einem solchen Experiment nie ein Verhalten, das klassisch nicht erklärbar wäre.



### Photonen als Teilchen

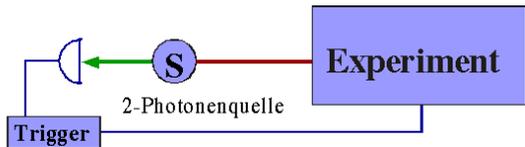


Abbildung 6.18: Experimente mit einzelnen Photonen

Es ist jedoch möglich, einzelne Photonen zu erzeugen auf eine Weise, dass man genau weiß, wann sich ein (und nur eines!) Photon im Experiment befindet. Dazu verwendet man eine Lichtquelle, welche Photonen in Paaren erzeugt, welche unter einem gegebenen Winkel auseinanderfliegen. Wenn eines dieser Photonen beobachtet wird weiß man, dass sich in diesem Moment das andere Photon in der Messapparatur befindet. Es gibt verschiedene Lichtquellen, welche diese Forderung erfüllen. Eine Gruppe vom Institut d'Optique in Orsay hat dafür eine sogenannte atomare Kaskade benutzt (P. Grangier, G. Roger, and A. Aspect, *Europhys. Lett.* 1, 173 (1986).). Die zweite Gruppe, von der Universität Rochester, benutzte parametrische Fluoreszenz in einem optisch nichtlinearen Kristall (C.K. Hong and L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.* 56, 58 (1986).).

Einzelphotonen können z.B. verwendet werden um die Frage zu untersuchen ob Licht Wellen- oder Teilchencharakter hat.

Schickt man das einzelne Photon auf einen gewöhnlichen Strahlteiler, so kann es natürlich nur einmal detektiert werden. Man erwartet deshalb bei einem solchen Aufbau eine perfekte Antikorrelation der beiden Detektoren, und das findet man auch experimentell. Dieses Experiment "belegt" somit den Teilchencharakter eines Photons:

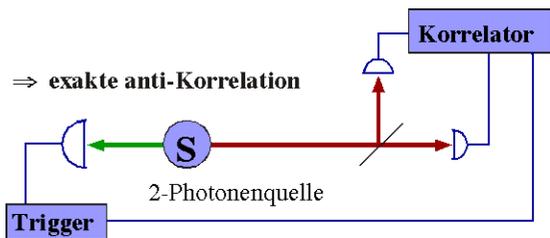


Abbildung 6.19: Exakte anti-Korrelation an einem Strahlteiler: Photonen sind nicht-teilbare Teilchen!

es "entscheidet" am Strahlteiler ob es transmittiert oder reflektiert wird.

Mit einem fast identischen Aufbau kann man aber auch den Wellencharakter einzelner Photonen nachweisen.

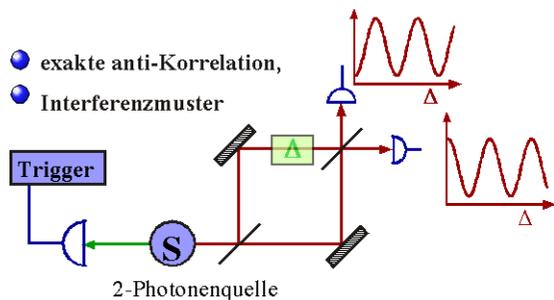


Abbildung 6.20: Mach-Zehnder Interferometer mit Korrelationsmessung: Photonen sind Teilchen und Welle!

Mit einem zweiten Strahlteiler und zwei Spiegeln entsteht ein Interferometer. Durch Variation des optischen Weges in einem der beiden Arme kann man auf dem Detektor ein Interferenzmuster erzeugen, welches nur zustande kommen kann, wenn das Photon durch beide Arme des Interferometers läuft. Ein einzelnes Photon hat somit auch einen Wellencharakter. Diese beiden Experimente lassen sich deshalb weder mit einem reinen Wellenbild, noch mit einem reinen Korpuskelbild interpretieren: am ersten Strahlteiler geht das Photon offenbar in beide Richtungen gleichzeitig, am zweiten entscheidet es sich für eine der beiden Möglichkeiten.

### 6.3.2 Erzeugung von Fock-Zuständen

Zustände mit einzelnen Photonen können verallgemeinert werden zu Zahlzuständen, welche auch als Fock-Zustände bezeichnet werden. Prinzipiell können diese auf die gleiche Weise wie die Einzelphotonenzustände erzeugt werden. Allerdings ist die zeitliche Statistik nicht vorhersagbar.

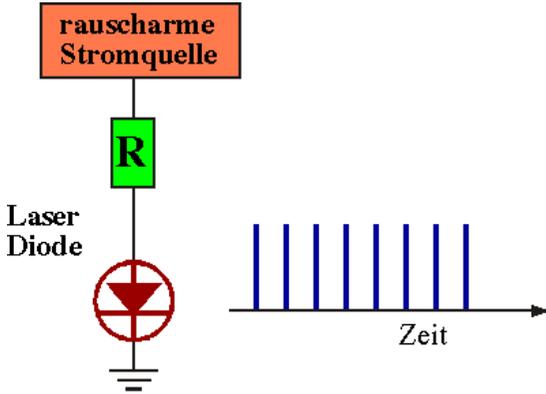


Abbildung 6.21: Sub-Poisson Licht aus einem Halbleiterlaser.

Wahrscheinlich die einfachste Methode, um Licht mit sub-Poisson Statistik zu erzeugen besteht darin, zunächst einen elektrischen Strom mit sub-Poisson Statistik zu erzeugen. Mit einem perfekten Halbleiterlaser (Quantenausbeute = 100%) könnte die entsprechende Elektronenstatistik direkt auf die Photonenstatistik übertragen werden. Heute sind Ausbeuten in der Größenordnung von 60-80% erreichbar, so dass ein wesentlicher Teil der Statistik übertragen werden kann.

Der Umweg über die Erzeugung eines rauscharmen Stroms lohnt sich deshalb, weil ein Strom mit sub-Poisson Statistik sehr viel leichter zu erzeugen ist, als ein entsprechender Lichtstrahl. Der Grund hängt damit zusammen, dass Elektronen Fermionen sind und deshalb einer anderen Statistik unterliegen, als Photonen. Die Aufteilung eines Lichtstrahls mit sub-Poisson Statistik an einem Strahlteiler, z.B., erhöht die relativen Fluktuationen in Richtung Poisson-Statistik, während die Aufteilung eines Stroms am Knoten eines elektrischen Netzwerkes das Rauschen auch

relativ verringert. Außerdem ist es heute möglich, mit Einzelelektron-Gattern einzelne Elektronen zu transportieren und so eine beliebige Statistik zu erzielen, wie z.B. Elektronen in konstanten Abständen.

Literatur: A. Imamoglu and Y. Yamamoto, 'Turnstile device for heralded single photons: Coulomb blockade of electron and hole tunneling in quantum confined p-i-n heterojunctions', Phys. Rev. Lett. 72, 210-213 (1994); J. Kim, O. Benson, H. Kan, and Y. Yamamoto, 'A single-photon turnstile device', Nature 397, 500-503 (1999).

### 6.3.3 Das Einstein-Podolsky-Rosen Paradox

Nichtklassische Korrelationen spielen eine wichtige Rolle in einem der berühmtesten Paradoxa der Quantenmechanik. Es wurde zuerst von Einstein, Podolsky und Rosen aus dem Jahre 1935 (A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, 'Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete?', Phys. Rev. 47, 777 (1935).). Darin konstruierten sie ein Gedankenexperiment, welches zeigen sollte, dass die Quantenmechanik keine vollständige Theorie sei. Dieser Einwand konnte die weitere Entwicklung der Quantenmechanik zwar nicht aufhalten, aber er wirkte doch sehr beunruhigend und inspirierte viele Versuche, diese Unvollständigkeit zu korrigieren, indem sogenannte verborgene Variablen eingeführt wurden.

John Bell gelang es, den Widerspruch zwischen den Voraussagen der Quantenmechanik und einer sehr allgemeinen Gruppe von klassischen Theorien in eine Ungleichung zu fassen und damit eine mathematische Grundlage für experimentelle Tests zu schaffen. Die Anforderungen, welche er an die klassischen Theorien stellte waren lediglich dass sie lokal im Sinne der Relativitätstheorie sein sollten, sowie "realistisch" im Sinne von EPR, d.h. dass physikalische Eigenschaften wie z.B. die Orientierung eines Spins unabhängig von der Messapparatur definiert sein sollten. Aus

diesen sehr allgemeinen Anforderungen konnte er zeigen, dass verborgene Variablen nicht beliebige Messresultate erklären können, sondern dass alle Theorien, welche als realistisch und lokal bezeichnet werden können, nur Messresultate innerhalb bestimmter Schranken erklären können. Diese Schranken werden durch Ungleichungen spezifiziert, welche allgemein als Bell'sche Ungleichungen bezeichnet werden.



Abbildung 6.22: Gedankenexperiment von Einstein, Podolsky und Rosen.

Überträgt man das Gedankenexperiment von EPR auf ein Paar von korrelierten Photonen so eignet sich besonders ein antikorreliertes Paar in einem Singlet-Zustand. Hier sind die einzelnen Spins nicht definiert, die Messung eines Spins legt jedoch sofort den anderen Spin fest. Führt man gleichzeitig an beiden Photonen Messungen der Spin-Orientierung durch indem man sie durch einen Polarisator schickt, so erwartet man offensichtlich dass die Koinzidenzrate als Funktion der unterschiedlichen Orientierung der beiden Polarisatoren mit

$$\frac{R(\alpha - \beta)}{R_0} = \frac{1}{4} [1 + \cos(2(\alpha - \beta))]$$

variiert: sie ist maximal bei paralleler Stellung und verschwindet bei gekreuzten Polarisatoren.  $R_0$  ist die Koinzidenzrate ohne Polarisatoren.

### 6.3.4 Verletzung der Bell'sche Ungleichungen für Photonennpaare

Aus dem Bell'schen Ungleichungen ergibt sich, dass z.B. für

$$|R(22.5^\circ) - R(67.5^\circ)| \leq \frac{1}{4}.$$

Quantenmechanisch findet man

$$\begin{aligned} & |R(22.5^\circ) - R(67.5^\circ)| \\ &= \frac{1}{4} \left[ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right] = \frac{\sqrt{2}}{4} = 0.354 > 0.25, \end{aligned}$$

also einen klaren Widerspruch. Ob die Natur den Gesetzen der Quantenmechanik gehorcht oder lokal und realistisch ist muss experimentell untersucht werden.

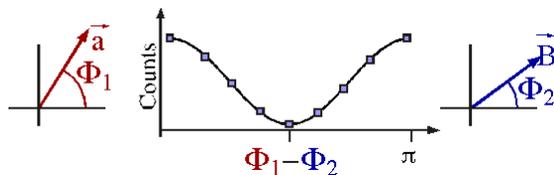


Abbildung 6.23: Ergebnis der Experimente Aspect.

Verschiedene solche Tests wurden durchgeführt, die meisten in enger Anlehnung an das ursprüngliche Gedankenexperiment. Es wurden optische Photonen,  $\gamma$ -Quanten, aber auch Protonen verwendet. Eines dieser Experimente wurde vor etwa 1981 Jahren von einer Gruppe der Université Paris-Sud mit einem experimentellen Aufbau durchgeführt, welcher auf dem gleichen Prinzip basiert wie die vorhin besprochenen Einphotonenexperimente. Die 2-Photonenquelle emittierte in diesem Fall Photonen in einem Singletzustand, sodass eine Korrelation zwischen den Photonspins bestand. Die beiden Photonen wurden durch zwei Polarisatoren geschickt. Dahinter wurden die Zählraten als Funktion der Orientierung dieser Polarisatoren gemessen. Quantenmechanisch erwarte man einen sinusförmigen Verlauf der Koinzidenz-Zählrate als Funktion des relativen Drehwinkels zwischen den beiden Polarisatoren. Eine solche Abhängigkeit von der relativen Orientierung verletzt die Bell'schen Ungleichungen und schließt damit eine Erklärung aufgrund lokaler realistischer Theorien aus.

Die experimentellen Resultate, welche hier skizziert sind, waren in ausgezeichneter Übereinstimmung mit den quantenmechanischen Voraussagen und verletzten die Bell-Ungleichung um viele Standardabweichungen. Ähnlich Messungen

wurden inzwischen von vielen anderen Gruppen wiederholt. Insgesamt konnten diese Experimente klar belegen, dass die Quantenmechanik korrekt ist und dass die beobachteten Phänomene nicht mit lokalen, realistischen Theorien übereinstimmen können.

## 6.4 Gequetschtes Licht

### 6.4.1 Unschärfe von Feldamplituden

Betrachtet man die Darstellung von Erzeugungs- und Vernichtungsoperator in der Basis der Zahlzustände

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle,$$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle,$$

so sieht man, dass diese beiden Operatoren nicht miteinander vertauschen:

$$aa^\dagger|n\rangle = (n+1)|n\rangle,$$

$$a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle,$$

d.h.

$$[a, a^\dagger] = 1.$$

Daraus folgt auch, dass die Feldamplituden nicht miteinander vertauschen,

$$[E_c, E_s] \neq 0.$$

Allgemein findet man dass die Heisenberg'sche Unschärfenrelation für zwei Quadraturamplituden einer einzelnen Mode lautet

$$\sqrt{\langle \Delta E^2(0) \rangle \langle \Delta E^2(\phi) \rangle} \geq \frac{1}{4} \epsilon_c^2 |\sin \phi|.$$

Hier stellt  $\phi$  die Phase des Feldoperators dar und  $\epsilon_c$  das Feld eines Photons. Für einen kohärenten Zustand ist die Unschärfe unabhängig von der Phase. Da es sich um einen Zustand minimaler Unschärfe handelt, gilt somit

$$\langle \Delta E^2(\phi) \rangle_{coh} = \frac{1}{4} \epsilon_c^2.$$

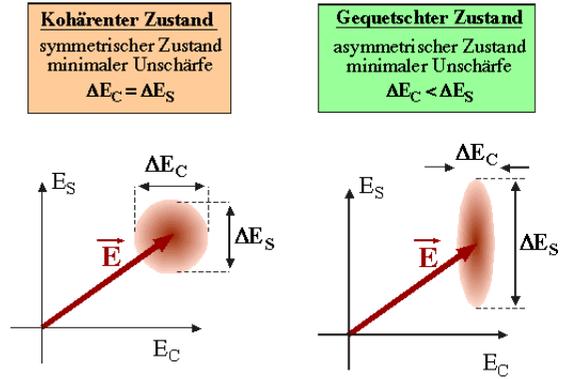


Abbildung 6.24: Unsicherheit für kohärenten und gequetschten Zustand.

Dies stellt den so genannten "standard quantum limit" dar, also die Grenze für die Genauigkeit, mit der eine elektrische Feldkomponente gemessen werden kann.

Die Unschärfe muss jedoch nicht symmetrisch verteilt sein. Zustände mit asymmetrisch verteilter Unschärfe haben den Namen "gequetschte Zustände" (engl.: "squeezed states") erhalten: die Unschärfe wird in eine Richtung reduziert, in die andere Richtung vergrößert. Ihre Eigenschaft kann am besten durch einen graphischen Vergleich mit einem kohärenten Zustand charakterisiert werden. In Abbildung 6.24 ist auf der linken Seite ein kohärenter Zustand dargestellt. Wie bereits erwähnt, ist dies der Zustand, der einer klassischen Welle am nächsten kommt. Diese Scheibe soll wiederum die Unschärfe des Zustandes andeuten; ihre Fläche ist durch die Heisenberg-Beziehung bestimmt. Ein Beispiel für einen gequetschten Zustand, welcher ebenfalls die Heisenberg-Beziehung erfüllt, ist rechts dargestellt: in diesem Fall wurde die Unschärfe der cos-Komponente auf Kosten der sin Komponente verkleinert oder zusammengequetscht.

In kohärenten Zuständen sind die Photonen statistisch nicht korreliert. Wenn die Unschärfe in einer Richtung kleiner ist als bei einem kohärenten Zustand, können diese Felder also nicht mehr aus unabhängigen Photonen bestehen. Squeezing entsteht deshalb aus Korrelationen zwischen Photonen-Paaren.

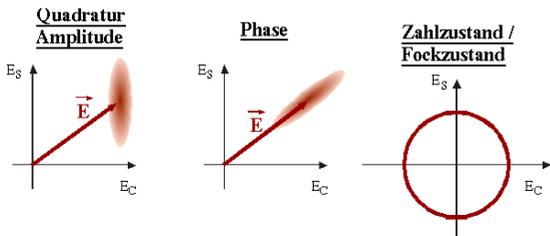


Abbildung 6.25: Eine Auswahl nichtklassischer Zustände.

Licht kann auf unterschiedliche Weise gequetscht werden, wobei die entsprechenden Rauscheigenschaften für unterschiedliche Experimente nützlich sein können. Zustände mit reduziertem Rauschen einer Quadraturamplitude sind z.B. interessant für kohärente optische Kommunikation. Eine andere Möglichkeit ist reduziertes Phasenrauschen. Solche Zustände sind z.B. für interferometrische Messungen interessant.

Zahlzustände (Fockzustände) sind Zustände mit reduzierten Intensitätsfluktuationen. Dafür ist die Phase dieser Zustände völlig unbestimmt. Solche Zustände eignen sich z.B. für hochempfindliche Absorptionsmessungen, da hier die Phase nicht relevant ist und sie durch das Schrotrauschen begrenzt sein können, welches in Fockzuständen eliminiert wird.

### 6.4.2 Erzeugung

Die Erzeugung von gequetschtem Licht ist in der Theorie relativ einfach. Man benutzt dafür einen 'squeezing' Operator.

Dieser hat im einfachsten Fall die Form

$$e^{r a^2 - r^* a^{\dagger 2}},$$

d.h. er enthält die zweite Potenz des Erzeugungs- und Vernichtungsoperators. Photonen werden somit in Paaren erzeugt, resp. vernichtet. Der Squeezing-Parameter  $r$  misst den Grad des squeezing.

Für das Experiment bedeutet dies, dass man nichtlineare optische Prozesse verwenden muss,

Theorie: Quetschen des Vakuumzustandes

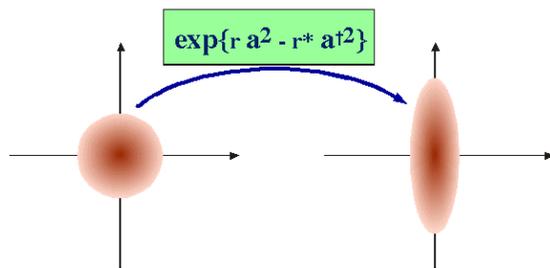


Abbildung 6.26: Quetschen des Vakuumzustandes.

um das Licht zu 'quetschen'. Dazu braucht man natürlich ein entsprechendes Medium. In den bisher realisierten Experimenten benutzte man dazu entweder nichtlineare dielektrische Kristalle, oder aber resonante atomare Medien. Prinzipiell kann aber bei praktisch jedem nichtlinear optischen Prozess "squeezing" entstehen. Man kann deshalb davon ausgehen, dass gequetschtes Licht in vielen Fällen entsteht ohne dass die Erzeuger es bemerken. In vielen Fällen wird es durch klassische Fluktuationen überdeckt.

### Experiment: Nichtlineare Optik z. B. Intensitätsabhängige Phasenverschiebung



Abbildung 6.27: Quetschen als nichtlineare Transformation.

Ein möglicher Weg zu gequetschtem Licht, der besonders anschaulich erklärt werden kann, beruht auf dem optischen Kerr Effekt, einer intensitätsabhängigen Phasenverschiebung. Man geht von einem kohärenten Zustand aus, hier im Bild als runde Scheibe dargestellt. Läuft dieses Licht durch ein Kerr Medium, so erfährt es je nach Intensität eine unterschiedlich große Phasenverschiebung - in diesem Diagramm also eine Dre-

hung um den Ursprung des Koordinatensystems. Diejenigen Teile dieser Scheibe, welche hohen Intensitäten entsprechen, also die äußeren Teile, erfahren dabei die größere Phasenverschiebung, werden also in dieser Darstellung weiter gedreht als der Teil näher beim Ursprung des Koordinatensystems. Auf diese Weise erhält man einen Zustand erzeugt, der in einer Richtung eine kleinere Unschärfe aufweist, als der kohärente Zustand.

Die Fläche dieser Kreisscheibe, also die gesamte Unschärfe des Zustandes ist unabhängig von der Entfernung vom Ursprung. Squeezing kann also bei allen Intensitäten auftreten, was natürlich eine wesentlich Voraussetzung für die Erzeugung von gequetschten Zuständen über nichtlinear optische Prozesse darstellt.

### 6.4.3 Parametrischer Oszillator

Der am häufigsten benutzte Prozess, um gequetschtes Licht herzustellen, benutzt einen parametrischen Oszillator.

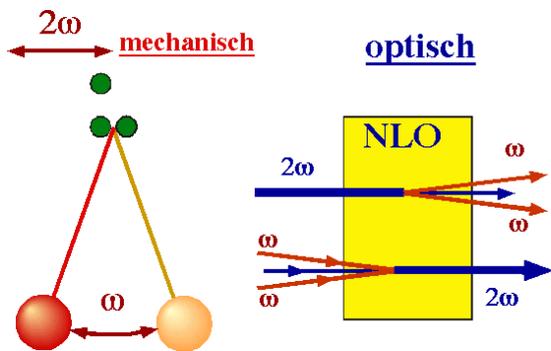


Abbildung 6.28: Parametrischer Oszillator

Den parametrischen Oszillator kann man auch mechanisch realisieren. Das entsprechende Modell besteht im Wesentlichen aus einem gewöhnlichen Pendel, dessen Pendellänge periodisch verkürzt und verlängert werden kann. Wie einem gewöhnlichen Pendel kann man auch diesem Pendel resonant Energie zuführen. In diesem Fall geschieht die, indem man die Pendellänge periodisch ändert. Die Resonanzbedingung ist dabei anders als bei einer direkten Anregung: man

muss die Pendellänge mit der doppelten Pendelfrequenz modulieren. Es gibt außerdem noch einen wesentlichen Unterschied: wenn das Pendel zu Beginn nicht ausgelenkt ist, so kann es auch keine Energie aufnehmen. Das parametrische Pendel wird nur angeregt wenn es bereits ausgelenkt ist. Dies ist ein Hinweis darauf, dass die Dynamik dieses Pendels nichtlinear ist; parametrische Prozesse erfüllen deshalb eine Voraussetzung für die Erzeugung von gequetschtem Licht.

Das optische Analogon dieses mechanischen Modells besteht aus zwei gekoppelten Moden des Strahlungsfeldes, wobei die Frequenz der einen Mode doppelt so groß ist wie die der anderen. Durch die Kopplung, welche über ein optisch nichtlineares Medium geschieht, ist es möglich, z.B. ein blaues Photon in zwei rote Photonen mit der halben Energie umzuwandeln. Auch der umgekehrte Prozess ist möglich, nämlich die Umwandlung von zwei roten Photonen in ein blaues mit der doppelten Energie.

Für den Zweck dieser Betrachtungen spielt es keine Rolle, wie diese Prozesse im Detail ablaufen. Wesentlich ist praktisch nur, dass es sich um nichtlineare Prozesse handelt. Lineare optische Prozesse führen nämlich kohärente optische Zustände in andere kohärente Zustände über. Nichtlineare Prozesse, hingegen, können zu einer Verzerrung der Form des Zustandes führen und damit squeezing ermöglichen.

### 6.4.4 Messung

Mindestens so schwierig wie die Erzeugung von gequetschtem Licht ist dessen Nachweis.

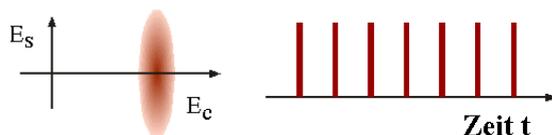


Abbildung 6.29: Photonenzählung: Antibunching.

Am einfachsten ist dies, wenn der Zustand in

Richtung der kohärenten Anregung gequetscht ist, wie in diesem Beispiel dargestellt. Offensichtlich ist in diesem Fall die Intensität 'gequetscht'. Dies kann man in einem Photonen-Korrelationsexperiment nachweisen, da ein solcher Zustand eine sub-Poisson Statistik ergibt: die Photonen zeigen "antibunching", d.h. sie kommen in regelmäßigeren Abständen an, als bei einer klassischen Welle möglich wäre.

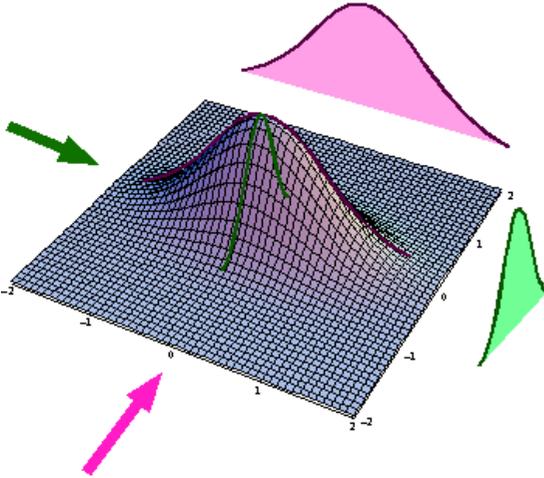


Abbildung 6.30: Tomographie eines gequetschten Zustandes.

Bei einer allgemeinen Orientierung des gequetschten Zustandes wird die Photonenzahlstatistik eher super-Poisson sein. Die gemessene Unschärfe der Photonenzahl  $\delta n$  kann als Interferenz der Amplitudenunschärfe  $\delta E$  mit der kohärenten Anregung  $E$  verstanden werden:

$$\delta n = |E \delta E|,$$

d.h. als Projektion auf die Richtung der kohärenten Anregung.

Um hier die gequetschte Unschärfe zu sehen, muss man eine phasenempfindliche Messmethode anwenden: Der Zustand wird auf eine andere Achse projiziert als auf die Richtung der Anregung.

## 6.4.5 Heterodyn-Detektion

Dies ist möglich mit Hilfe eines sogenannten Heterodyn Nachweises. Dabei wird dem zu messenden Signal ein starkes zusätzliches Feld überlagert, der sogenannte Lokalszillator:

$$E = E_{sig} + E_{lo}.$$

Das Signal ist proportional zur Intensität und damit zu

$$\begin{aligned} |E|^2 &= |E_{sig} + E_{lo}|^2 \\ &= |E_{sig}|^2 + 2\text{Re}\{E_{sig}E_{lo}^*\} + |E_{lo}|^2. \end{aligned}$$

Der mittlere Term hängt von der relativen Phase von Signal- und LO-Feld ab:

$$2\text{Re}\{E_{sig}E_{lo}^*\} = 2|E_{sig}||E_{lo}|\cos(\phi_{sig} - \phi_{lo}).$$

In den meisten Fällen verwendet man für den Lokalszillator eine andere Frequenz als für das Signal. Damit wird der zweite Term zeitabhängig: er oszilliert mit der Differenzfrequenz zwischen den beiden Feldern. Dadurch kann er leicht von den beiden anderen Termen abgetrennt werden, welche zeitunabhängig sind.

Betrachtet man dieses Heterodynsignal als eigentliche Messgröße, so sieht man, dass es proportional zur Feldstärke des Lokalszillators ist. Über die Phase  $\phi_{lo}$  kann ausgewählt werden, welche Komponente des Signals beobachtet wird: es erfolgt eine Projektion auf die Richtung des Lokalszillators. Je nach Wahl der Phase kann man also die minimalen oder maximalen Fluktuationen messen.

Werden Signal und Lokalszillator auf einem 50/50 Strahlteiler überlagert, so erhält man in den beiden Ausgängen zwei Überlagerungen, deren relative Phasen sich um 180 Grad unterscheiden. Damit besitzt der Interferenzterm auf den beiden Detektoren ein unterschiedliches Vorzeichen, während die Terme, die nur von einem Strahl stammen, gleiches Vorzeichen besitzen. Eine Differenzmessung ergibt somit ein Signal, das nur den Interferenzterm (=Heterodyn Term) enthält.

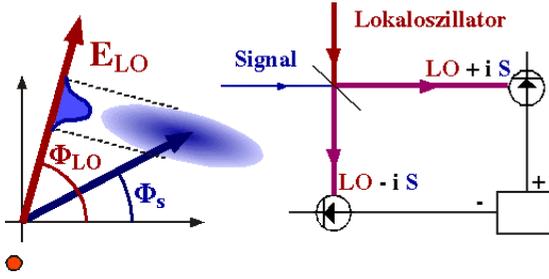


Abbildung 6.31: Heterodyn Nachweis eines gequetschten Zustandes mit allgemeiner Phase.

Zusätzlich zum kohärenten Signal misst man auch Rauschen. Klassisches Rauschen des Lokaloszillators ist auf beiden Detektoren identisch und wird deshalb bei der Differenzbildung eliminiert. Das Schrotrauschen des Lokaloszillators ist hingegen auf den beiden Detektoren antikorreliert, da die Photonen nur auf dem einen oder anderen Detektor eintreffen können. Die Differenzbildung addiert deshalb die beiden Beiträge. Die Messung mit einem Strahlteiler und einem Differenzdetektor ermöglicht deshalb im Allgemeinen eine Messung des Schrotrauschens.

Die Überlagerung des gequetschten Signalstrahls über den Lokaloszillator ändert die Rauscheigenschaften:

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = 4|\alpha_L|^2 \langle [\Delta E(\phi)]^2 \rangle.$$

Hier stellt  $|\alpha_L|$  die Amplitude des Lokaloszillators dar und  $\Delta E(\phi)$  die Fluktuation des Signalstrahls in der durch die Phase  $\phi$  bestimmten Richtung.

Ist der Signalstrahl der Vakuumzustand (d.h. kein Licht) oder ein anderer kohärenter Zustand, so ist

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = |\alpha_L|^2 \epsilon_c^2.$$

Hier stellt  $\epsilon_c^2$  die Feldamplitude der Grundzustandsschwankungen dar.

Fällt statt dessen gequetschtes Licht auf den Strahlteiler, so kann das Rauschen kleiner oder größer werden. Ändert man die Phase des Lokaloszillators, so kann man sämtliche Quadraturkomponenten des Signalfeldes messen.

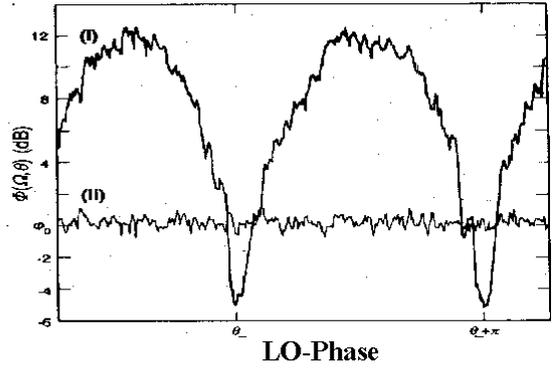


Abbildung 6.32: Rauschsignale als Funktion der LO-Phase.

Die konstante Spur (II) zeigt das Rauschen ohne Signalfeld, die Spur (I) das Rauschen mit Signalfeld als Funktion der Phase des lokalen Oszillators. Squeezing erkennt man hier ganz einfach daran, dass das gemessene Rauschen bei einer geeigneten Phase kleiner ist als ohne Signalfeld. Dies zeigt noch einmal deutlich die nichtklassische Natur des Lichtes: Klassisch addieren sich die Rauschleistungen unabhängiger Signale immer; hier findet man aber eine niedrigere Rauschleistung, wenn man das Signal einschaltet, als wenn es verschwindet. Quantenmechanisch drückt man dies so aus, dass, wenn das Signal hier nicht einfällt, dieser Eingang nicht einfach leer ist im klassischen Sinn, sondern dass in diesem Fall der Vakuumzustand hier einfällt - und dieser hat selber ein Rauschen, nämlich aufgrund der Grundzustandsenergie des harmonischen Oszillators.

### 6.4.6 Squeezing an Na

Die erste experimentelle Beobachtung eines gequetschten Zustandes wurde von den Bell Labs publiziert. Die Gruppe benutzte dazu Vierwellenmischung an einem Natrium Atomstrahl. Um die Effekte zu verstärken, wurde das Experiment in einem optischen Resonator durchgeführt. Ein starker Pumpstrahl dient dazu, das Medium in einen nichtlinearen Bereich zu treiben, sodass das squeezing auf dem zweiten, wesentlich schwächeren Strahl erfolgen kann.

### Vierwellenmischung an einem Na-Atomstrahl

R.E. Slusher, L.W. Hollberg, B. Yurke, J.C. Mertz, and J.F. Valley,  
*Phys. Rev. Lett.* **32**, 2409 (1965).

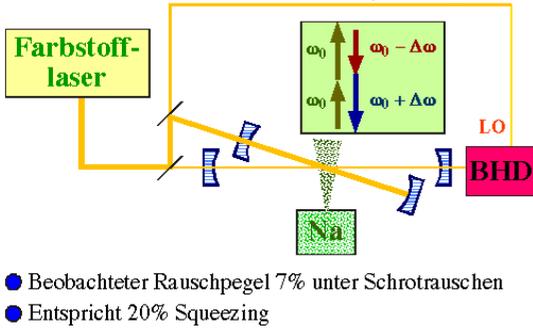


Abbildung 6.33: 4-Wellenmisch Experiment an einem Na-Atomstrahl.

Durch die nichtlineare Wechselwirkung zwischen den optischen Moden und den Na Atomen werden zwei Photonen des Pumpstrahls in zwei Seitenbandphotonen umgewandelt, d.h. in Photonen, deren Energie gegenüber dem Pumplicht um einen Betrag  $\Delta\omega$  verschoben ist. Dadurch entsteht also eine Korrelation zwischen diesen Photonen, welche letztlich zum squeezing Effekt führt.

Die Signalwelle wurde, wie oben gezeigt, in einen Heterodyn-Detektor gebracht, welcher zur Analyse des Amplitudenrauschens benutzt wurde. Als Lokaloszillator wurde ein Teilstrahl des gleichen Lasers verwendet. Die Gruppe maß eine Reduktion des Rauschens unter die Schrotrauschgrenze um 7%. Daraus kann man, unter Berücksichtigung der Detektorempfindlichkeiten, auf das Squeezing zurückrechnen und erhält eine Zahl von rund 20%. Maximales Squeezing sollte für hohe Leistungen erreicht werden, aber andererseits wird natürlich der Nachweis bei hohen Leistungen um so schwieriger.

#### 6.4.7 Anwendung: Interferometrie

Die ersten experimentell demonstrierten Anwendungen von gequetschtem Licht stammen zum einen ebenfalls aus den Bell Labs, zum andern aus Texas. Dass interferometrische Experimente mit Hilfe von gequetschtem Licht höhere Empfindlichkeiten erreichen können, war seit länge-

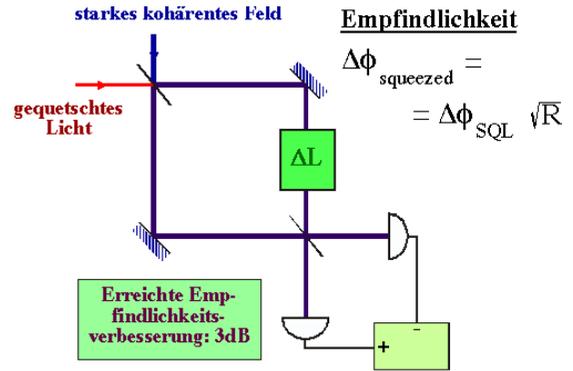


Abbildung 6.34: Interferometrie mit gequetschtem Licht

rem bekannt und eine der stärksten Motivationen für die Arbeiten auf diesem Gebiet. Der hier gezeigte Aufbau entspricht im Wesentlichen einem Mach-Zehnder Interferometer, also einem Gerät zur genauen Messung von Distanzunterschieden. Der Messtrahl wird an einem ersten Strahlteiler aufgeteilt und die beiden Teilstrahlen auf einem zweiten Strahlteiler wieder zusammengeführt. Je nach Weglängenunterschied fällt der Strahl hinter diesem Strahlteiler auf den einen oder anderen Detektor. Wie beim gewöhnlichen Heterodyn-Nachweis ist das resultierende Rauschen des Detektors durch das Quantenrauschen des schwachen Strahls beschränkt, welcher am ersten Strahlteiler dem starken Messtrahl überlagert wird. In einem gewöhnlichen Mach-Zehnder Interferometer befindet sich diese Mode im Vakuumzustand, d.h. man erhält im Idealfall ein Schrotrausch-limitiertes Signal. Wenn man statt dessen einen gequetschten Zustand einfallen lässt, erhält man ein Rauschen, das um den Betrag  $\sqrt{R}$  kleiner ist, wobei  $R$  das squeezing parametrisiert.  $R = 1$  entspricht einem kohärenten Zustand, z.B. dem Vakuumzustand,  $R = 0$  einem perfekt gequetschten Zustand.

Mit einem solchen Aufbau gelang es 1987 zwei Gruppen, interferometrische Messungen unterhalb der Schrotrauschgrenze durchzuführen. Die mittlere Spur stellt das Rauschen ohne gequetschtes Licht dar, d.h. mit dem Vakuumzustand am zweiten Eingang. Die beiden durch-

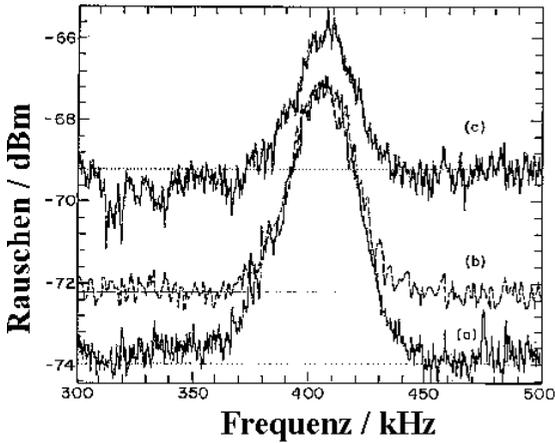


Abbildung 6.35: Empfindlichkeitssteigerung in der Interferometrie.

gezogenen Kurven entsprechen zwei Quadraturamplituden des gequetschten Zustandes, welche eine Erniedrigung, resp. Erhöhung des Rauschens zeigen. In diesem Beispiel wurden 2 dB, in anderen Experimenten auch mehr Rauschunterdrückung erreicht. Die erhöhte Rauschleistung bei 400 kHz ist ein Störsignal, welches dadurch zustande kommt, dass mit 400 kHz die Polarisation rotiert wird.

Andere interferometrische Messungen, welche bereits an der Schrotrauschgrenze durchgeführt werden und somit von solchen Experimenten profitieren könnten, umfassen Lasergyroskope oder phasenempfindliche Detektoren in der kohärenten optischen Kommunikation. Ein wesentliches Problem bei solchen Experimenten ist immer die Tatsache, dass gequetschte Zustände sehr empfindlich sind. Jegliche Art von Verlusten, wie z.B. nicht 100% effiziente Detektoren, vermindern das effektive Squeezing. Wenn man einen perfekten Zahlzustand, also einen Zustand mit wohldefinierter Photonenzahl und damit verschwindenden Intensitätsschwankungen, auf einen Detektor mit einer Quantenausbeute von 50% misst, erhält man das gleiche Rauschen wie bei einem kohärenten Zustand mit der gleichen mittleren Photonenzahl - d.h. dadurch ist der gesamte squeezing-Effekt verschwunden.

## 6.4.8 Gravitationswellen

Eine der Anwendungen, welche möglicherweise stark von gequetschtem Licht profitieren könnte ist der Nachweis von Gravitationswellen. Die allgemeine Relativitätstheorie erklärt ja die Schwerkraft als eine Verzerrung des Raumes. Bewegte Massen sollten deshalb zu zeitlich veränderlichen Verzerrungen führen, die sich außerdem durch den Raum ausbreiten. Diese Gravitationswellen sind bisher aber erst theoretisch vorausgesagt worden; der experimentelle Nachweis ist sehr aufwendig, denn die theoretisch vorausgesagten Längenänderungen sind sehr klein. Diejenigen Prozesse, welche die größten Effekte erzeugen sollten, sind astrophysikalische Vorgänge, bei denen große Massen in kurzer Zeit große Veränderungen erfahren.

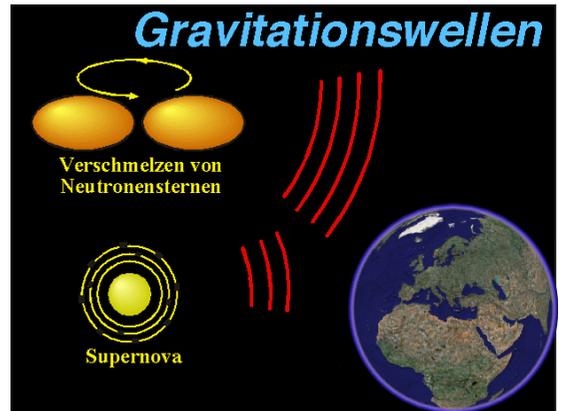


Abbildung 6.36: Entstehung von Gravitationswellen.

Zu den wichtigsten Beispielen gehören das Verschmelzen von zwei Neutronensternen oder die Explosion einer Supernova. Im ersten Fall würden sich die beiden Neutronensterne zunächst um ihren gemeinsamen Schwerpunkt drehen, wobei sie durch Gezeiteneffekte unter dem Einfluss ihrer gegenseitigen Anziehung stark verformt wären. Dabei würden also zwei sehr große, kompakte Massen rasche Bewegungen ausführen und dadurch Energie in der Form von Gravitationswellen abstrahlen. Durch diesen Energieverlust wird die Bahn immer enger, bis die beiden Sterne verschmelzen.

Bei einer Supernova werden natürlich ebenfalls sehr große Massen rasch bewegt und erzeugen dadurch Gravitationswellen, welche wiederum einen erheblichen Teil der freiwerdenden Energie abführen. Diese Gravitationswellen breiten sich dann mit Lichtgeschwindigkeit aus, bis sie auf die Erde treffen, wo wir sie nachweisen können.

### 6.4.9 Nachweis von Gravitationswellen

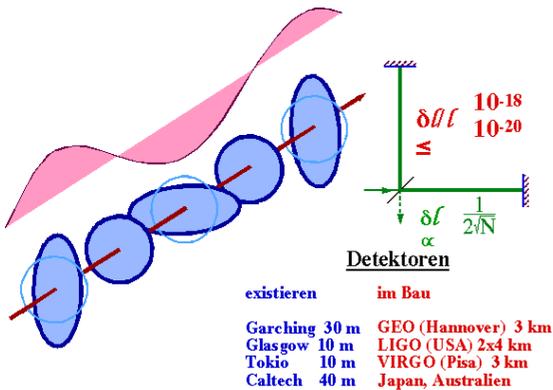


Abbildung 6.37:

Die Gravitationswelle kann man sich ähnlich wie eine elektromagnetische Welle vorstellen, wobei der Raum in orthogonalen Richtungen gestreckt, resp. verkürzt wird. An einem fixen Ort sieht man also periodische Verzerrungen, wobei die Periode von der Art der Quelle abhängt. Für die erwähnten astrophysikalischen Quellen liegen die erwarteten Perioden etwa in der Gegend einer ms, was Wellenlängen von einigen hundert bis einigen tausend km entspricht.

Um solche Wellen nachzuweisen, könnte man prinzipiell den hier gezeigten Aufbau eines Michelson Interferometers benutzen. Allerdings muss man dafür recht genau arbeiten, da man bei den wahrscheinlichsten Prozessen mit relativen Längenänderungen von  $\delta l/l \approx 10^{-20}$  rechnet, welche auf einer Zeitskala von etwa 1 ms ablaufen. Die optimale Größe des Resonators würde einer halben Wellenlänge entsprechen, also einigen km.

Um die Gravitationswellen nachweisen zu können, muss man in einem solchen Resonator Län-

genänderungen von der Größe  $1/100$  des Durchmessers eines Atomkerns nachweisen können. Als Vergleich kann man dies auf die Distanz Sonne-Erde beziehen, die man auf einige Atomdurchmesser genau bestimmen müsste.

Die Länge der Interferometerarme wird über die optische Phase gemessen, welche für 'klassisches' Licht mit einer Genauigkeit von  $\frac{1}{2\sqrt{n}}$  gemessen werden kann (Y. Yamamoto and H.A. Haus, 'Preparation, measurement and information capacity of optical quantum states', Rev. Mod. Phys. 58, 1001-1020 (1986).). Je größer die Anzahl der Photonen, desto genauer kann also die Armlänge bestimmt werden.

Heute stehen bereits mehrere Prototypen von solchen Detektoren in Betrieb. Sie dienen im wesentlichen dazu, Erfahrungen zu sammeln und die Technik auszutesten. Es sind aber auch schon mehrere größere Systeme im Bau.

Ein Squeezing von 20% würde die Chance für eine erfolgreiche Messung um einen Faktor 3 erhöhen. Inzwischen wurden auch schon höhere Werte erreicht, welche bei einer Anwendung im Gravitationswelleninterferometer die Nachweischancen um rund eine Größenordnung erhöhen würden.

### 6.4.10 Weitere Anwendungen

Ein weiteres Beispiel, welches hohe Anforderungen an die Messgenauigkeit stellt, ist die kohärente optische Kommunikation. Hier werden heute schon hunderte von Milliarden bit pro Sekunde übermittelt, wobei Leistungen in der Größenordnung von einem Milliwatt benutzt werden. Pro Bit stehen also nur noch einige tausend Photonen zur Verfügung und das Schrotrauschen limitiert deshalb bald die mögliche Messgenauigkeit, resp. Bit-Fehler Rate. Prinzipiell kann man das Signal zu Rausch Verhältnis verbessern indem man höhere Leistungen, also größere Photonenraten, verwendet. Es dürfte aber klar sein, dass dies nicht beliebig weit getrieben werden kann. Eine Alternative besteht darin, nichtklassisches Licht

zu verwenden, bei dem die erreichbare Messgenauigkeit nicht mehr durch das Schrotrauschen, resp. durch die Poisson-Statistik beschränkt ist.

Als letzter Punkt sollte auch erwähnt werden, dass anhand einiger Beispiele gezeigt wurde, dass gequetschtes Licht empfindlichere Spektroskopie erlaubt.

## 6.5 Rückwirkungsfreie Messungen

### 6.5.1 Rückwirkung

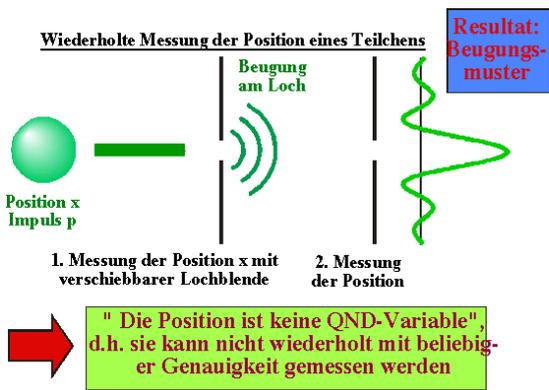


Abbildung 6.38: Positionsmessung: eine Messung beeinflusst spätere Messungen.

Eine weitere Möglichkeit für Messungen unterhalb der Schrotrauschgrenze hängt eng zusammen mit dem Konzept der sogenannten QND, Quantum Nondemolition Detection oder, wie man das vielleicht übersetzen könnte, rückwirkungsfreie oder rückwirkungsarme Messungen.

Ich möchte das Konzept zunächst anhand eines mechanischen Beispiels erläutern. Betrachten wir also ein Teilchen mit Position  $x$  und Impuls  $p$ . Klassisch wie auch quantenmechanisch kann man die Position des Teilchens - der Einfachheit halber in einer Dimension - im Prinzip beliebig genau messen, z.B. indem man es durch einen Spalt passieren lässt. In dem Moment, wo das Teilchen

durch den Spalt tritt, wissen wir mit Bestimmtheit, dass es sich an der Stelle des Spaltes befindet.

Wenn diese Messung sehr genau ist, dann erhält aber der Impuls des Teilchens eine entsprechende Unschärfe gemäß der Heisenberg Beziehung. 'Genau' ist übrigens in diesem Zusammenhang sehr gut definiert: Es bedeutet, dass die Breite des Spaltes vergleichbar sein muss mit der deBroglie Wellenlänge des Teilchens. Zunächst stört uns diese Unschärfe des Impulses nicht weiter - wir wollten ja die Position des Teilchens messen, der Impuls interessiert uns vorläufig nicht. Wenn wir die Position aber ein weiteres mal messen wollen, so finden wir anstelle der scharfen Position bei der Position des Schlitzes ein Beugungsmuster, das um so breiter ist, je schmaler der Schlitz bei der ersten Messung war. Je genauer wir die Position des Teilchens bei der ersten Messung bestimmen, desto ungenauer werden die späteren Messungen ausfallen. Es ist also prinzipiell nicht möglich, die Position eines freien Teilchens wiederholt mit beliebiger Genauigkeit zu messen.

Dies ist nicht für alle Variablen der Fall. Im gleichen Beispiel eines freien Teilchens kann man den Impuls wiederholt mit beliebiger Genauigkeit messen. Dabei wird zwar jeweils die Ortsunschärfe sehr groß, doch diese hat keinen Einfluss auf spätere Messungen des Impulses. Der Unterschied zwischen den beiden Variablen liegt im Hamiltonoperator begründet:

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m}.$$

Der Impuls (und somit seine Unschärfe) bestimmt die Entwicklung des Teilchens. Ein Eigenzustand des Impulses (wie er aus einer idealen Messung resultiert) kommutiert mit dem Hamiltonoperator und ist deshalb zeitunabhängig. Ein Eigenzustand des Ortes (mit einer entsprechend großen Impuls-Unschärfe) hingegen kommutiert nicht mit dem Hamiltonoperator und ist deshalb zeitabhängig. Eine weitere Messung gibt deshalb ein anderes Resultat. Man drückt dies so aus, dass der Impuls eines freien Teilchens eine QND-Variable sei, nicht aber die Position. Allgemein

bezeichnet man Operatoren als QND-Variablen für ein bestimmtes System wenn ihre Messung wiederholt mit beliebiger Genauigkeit durchgeführt werden kann.

### 6.5.2 Optische QND Messungen

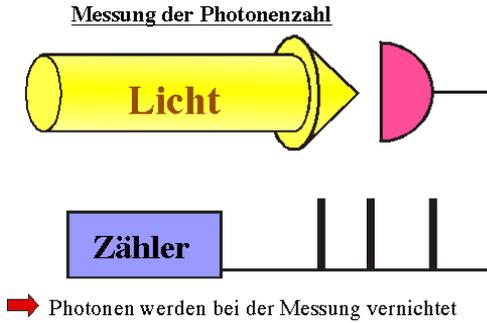


Abbildung 6.39: Messung der optischen Leistung (non QND).

Das gleiche Problem stellt sich auch in der Optik. Wenn wir zum Beispiel die Photonenzahl, d.h. die Intensität eines Laserstrahls messen wollen, so geschieht das üblicherweise indem man das Licht auf einen Detektor fallen lässt, wo die Photonen in Elektronenimpulse umgewandelt werden. Dieser Prozess kann mit sehr hoher Quantenausbeute stattfinden und damit eine recht genaue Messung der Photonenzahl, also der Intensität, ermöglichen. Er ist aber ein sehr destruktiver Prozess: wir wissen jetzt, wie viele Photonen vor der Messung vorhanden waren, aber eine weitere Messung würde konsistent das Resultat Null ergeben.



Abbildung 6.40: QND Messung der Intensität über optischen Kerr Effekt.

Dies ist aber nicht zwingend der Fall. Es gibt auch in der Optik bestimmte Variablen, die rückwirkungsfrei gemessen werden können, und dazu gehören die Amplituden optischer Felder oder ihre Intensität.

Eine mögliche Messanordnung ist hier skizziert: Man benutzt dazu ein sogenanntes Kerr Medium. Dabei handelt es sich um ein Material, dessen Brechungsindex von der Intensität des Lichtes abhängt,  $n = n(I)$ . Die Lichtintensität ändert also den Brechungsindex, und dieser kann mit Hilfe eines zweiten Laserstrahls gemessen werden. Dieser Hilfslaserstrahl kann nachher gewöhnlich detektiert werden, und wir erhalten dadurch ein Signal, welches die Intensitätsinformation enthält, obwohl der Laserstrahl, dessen Intensität wir nun kennen, immer noch vorhanden ist.

Die Messung des Brechungsindex erfolgt z.B. indem man interferometrisch die optische Weglänge

$$l_{opt} = l n(I)$$

bestimmt. Hier stellt  $l$  die geometrische Länge des Kristalls dar. Die optische Phasendifferenz, welche der Laserstrahl beim Durchgang durch den Kristall akkumuliert, ist

$$\Delta\phi = k l n(I).$$

Natürlich ist diese Information auch nicht gratis: wir haben zwar die Intensität nicht gestört, aber die konjugierte Variable, in diesem Fall also die optische Phase wurde gestört. Diese Störung kommt dadurch zustande, dass der Teststrahl umgekehrt auch einen Kerr-Effekt erzeugt und durch seine Fluktuationen die optische Weglänge "unscharf" macht. Dies hat aber i.a. keine Rückwirkung auf die Intensität und diese Messanordnung stellt deshalb eine QND-Messung dar.

Solche Experimente wurden z.B. im IBM Labor in San José durchgeführt, wobei als Kerr Medium eine optische Faser benutzt wurde, um eine möglichst hohe Wechselwirkung zwischen den beiden Laserstrahlen zu erhalten. Andere Experimente (P. Grangier, J.F. Roch, and G. Roger,

Phys. Rev. Lett. 66, 1418 (1991).) wurden mit resonanten atomaren Medien durchgeführt. In diesem Fall gelang es insbesondere, Intensitätskorrelationen zwischen Laserstrahlen von zwei unabhängigen Lasern zu erzeugen.

### 6.5.3 QND für Squeezing

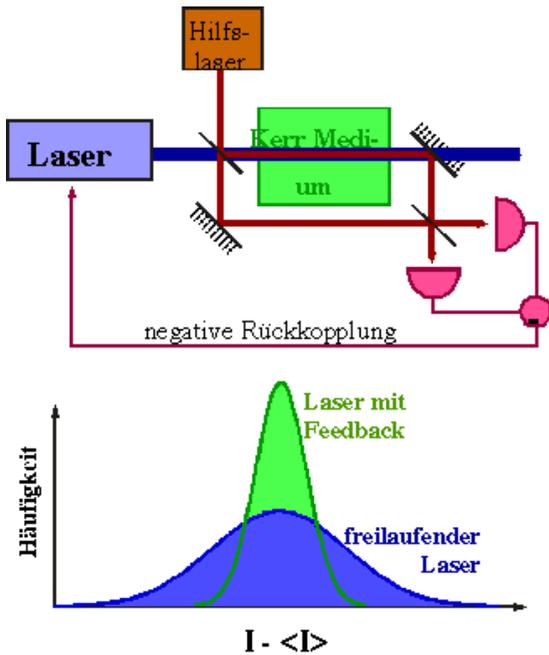


Abbildung 6.41: Squeezing durch QND Messung und Rückkopplung.

Da man mit einer solchen Messung die Intensität eines Laserstrahls beliebig genau messen kann, ohne sie zu stören, stellt dies eine ideale Voraussetzung dar, um die Intensität eines Lasers zu stabilisieren. Ein möglicher Versuchsaufbau ist hier gezeigt. Wie vorher prinzipiell gezeigt, kann man die Intensität des blauen Lasers dadurch messen, dass man ihm einen Hilfs-Laser überlagert. Diese Anordnung dient zur Messung der optischen Phase. Wie vorhin erläutert, erhält man aus der optischen Phase des roten Lasers die Intensität des blauen Lasers. Das Signal kann man natürlich mit einem Sollwert vergleichen und das entsprechende Fehlersignal als Rückkopplung auf den Laser bringen und damit

die Intensität stabilisieren. Ein idealer Laser erzeugt im freilaufenden Betrieb, weit oberhalb der Laserschwelle, Licht, dessen Intensität durch das Schrotrauschen limitiert ist. Durch diese Rückkopplung kann man die Intensität stabilisieren und näher zum gewünschten Wert bringen.

Solche Intensitätskorrekturen kann man natürlich nicht nur am Laser selber durchführen, sondern auch am Laserstrahl - es muss im Prinzip nicht einmal ein Laserstrahl sein, es könnte auch eine konventionelle Lichtquelle sein. Allerdings sollte sie schon möglichst in der Nähe der Schrotrauschgrenze arbeiten.

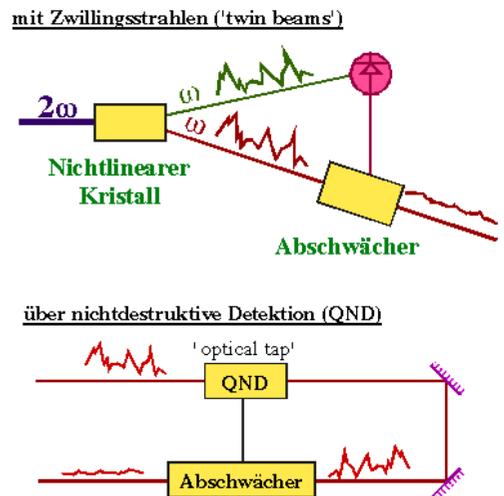


Abbildung 6.42: 2 Methoden für die Reduktion von Amplitudenschwankungen.

Bisher wurden zwei Methoden vorgeschlagen oder demonstriert. Im einen Fall benutzt man korrelierte Laserstrahlen, welche wiederum in einem nichtlinearen optischen Prozess hergestellt werden: in einem optisch nichtlinearen Kristall werden aus einem Photon durch 'parametric down-conversion' zwei Photonen mit niedrigerer Energie hergestellt. Diese beiden Photonen sind sozusagen Zwillinge: da sie aus dem gleichen Mutterphoton entstehen, haben sie genau die gleiche Geburtszeit; die beiden Intensitäten sind deshalb exakt gleich, d.h. die Schwankungen sind vollständig korreliert. Durch eine Messung der Intensität des einen Strahls weiß man also genau die Intensität des anderen Strahls und

kann somit ein Korrektursignal auf einen steuerbaren Abschwächer schicken, welcher die Amplitude korrigieren kann. Dabei kann man einen gewöhnlichen, destruktiven Detektor benutzen - man will ja den zweiten Strahl korrigieren.

Wenn man keine Zwillingstrahlen zur Verfügung hat, kann man trotzdem eine solche Messung durchführen. Man muss dann aber wiederum eine QND-Messung benutzen. Das erlaubt dann sogar eine 'feed-forward' Korrektur der Intensität, d.h. man kann hier - im Prinzip - mit beliebig großer Bandbreite korrigieren.

### 6.5.4 Empfindlichkeitssteigerung mit QND

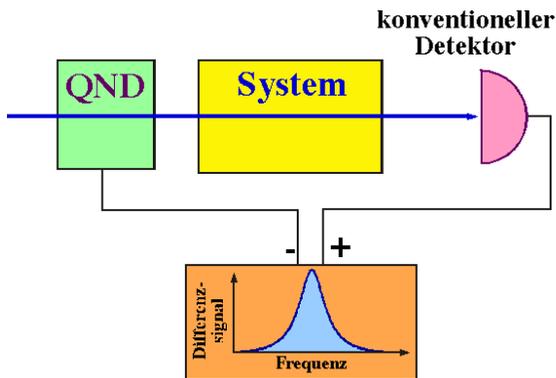


Abbildung 6.43: QND als Hilfsmittel zur Steigerung der Empfindlichkeit.

QND-Messungen erlauben es aber auch, mit konventionellem Licht Messungen durchzuführen, die nicht durch die Schrotrauschgrenze limitiert sind. Prinzipiell kann dies so ablaufen: man führt zunächst eine QND-Messung, z.B. der Intensität des Laserstrahls durch, der anschließend mit dem zu untersuchenden System in Wechselwirkung tritt. Danach kann man eine gewöhnliche Messung der verbleibenden Intensität durchführen. Diese Messung ist zwar mit Quantenrauschen behaftet, aber dank der ersten Messung kennen wir dieses Quantenrauschen und können es in der Verarbeitung der Daten subtrahieren. Zum mindesten in linearen Systemen kann man

auf diese Weise Messresultate erhalten, die nicht durch das Quantenrauschen verfälscht sind.

### 6.5.5 Zusammenfassung und Literatur

Als abschließende Diskussion betrachten wir 2 Fragen:

#### - Wo liegen die Grenzen der klassischen Theorie ?

- Die Maxwell Gleichungen sind lokal. Korrelationen zwischen Photonen werden deshalb nicht erklärt. Beispiele sind EPR-Korrelationen, Photon-Antibunching, Squeezing
- Nullpunktenergie des freien Feldes: Die Wechselwirkung des Vakuumzustandes mit materiellen Systemen führt zu spontaner Emission, Lamb Shift,  $g-2$ .

#### - Wann hilft die Quantenmechanik weiter ?

- Die Empfindlichkeit kann über der "Schrotrauschgrenze" liegen. Zustände des elektromagnetischen Feldes, die klassisch nicht beschreibbar sind ("squeezed states"), ermöglichen Experimente mit einer Empfindlichkeit, die unterhalb der Schrotrauschgrenze liegt. Beispiele: Laser-Gyroskop, Gravitationswellendetektor,
- kohärente optische Kommunikation
- Quanten-Kryptographie ermöglicht eine Datenübertragung, welche prinzipiell abhörsicher ist.

#### Weiterführende Literatur

Für diejenigen, welche sich noch genauer mit der Materie auseinandersetzen möchten, gibt es eine Reihe von Lehrbüchern und Übersichtsartikeln. Zur quantenmechanischen Natur des

**Photonenstatistik****Quantenoptik**

P. Meystre and M. Sargent III, 'Elements of Quantum Optics', Springer, Berlin (1990).

**Nichtlineare Optik****Squeezing**

P. Grangier, 'Spectroscopy Squeezed Beyond the Shot-Noise Limit', *Physics World* AUG.1992, 18-19 (1992).

**QND**

V.B. Braginsky, Y.I. Vorontsov, and K.S. Thorne, 'Quantum Nondemolition Measurements', *Science* 209, 547 (1980).

Abbildung 6.44: Weiterführende Literatur.

Lichtes, insbesondere seinen Rauscheigenschaften, gibt es ein ausgezeichnetes Lehrbuch von Meystre und Sargent. Nichtklassische Zustände des Lichtes, die ich hier behandelt habe, beruhen alle auf Korrelationen zwischen Photonen. Um diese Korrelationen zu erzeugen, benötigt man nichtlineare optische Prozesse. Die wichtigsten dieser Prozesse sind z.B. in diesem Buch von Ron Shen zusammengestellt. Eine Beschreibung von gequetschten Zuständen des Lichts gibt es zum einen im Buch von Meystre und Sargent. Es gibt aber auch einen Einführungsartikel von Dan Walls in *Nature*, welcher die wesentlichen Aspekte darstellt. Dieser Artikel ist sehr anschaulich und leicht verständlich geschrieben. Er ist allerdings schon 10 Jahre alt und enthält deshalb noch keine experimentellen Resultate, sondern faßt die theoretischen Voraussagen zusammen. Zum Thema der rückwirkungsfreien Messungen, sogenannten QND-Experimenten, gibt es ebenfalls einen etwas älteren Übersichtsartikel, welcher das Prinzip in leicht verständlicher Form darstellt.