Einführung in die Festkörperphysik WiSe 2021/2022
13. Übungsblatt

Ausgabe: 17.01.2022
Abgabe: 24.01.2022

Aufgabe 1: (Ganzzahliger) Quanten-Hall-Effekt — 8 Punkte

Legt man senkrecht (in z-Richtung) zu einem zweidimensionalen, freien Elektronengas ein starkes Magnetfeld B an, kann man den sogenannten Quanten-Hall-Effekt (Entdeckung 1980 durch Klaus von Klitzing, Nobelpreis 1985) beobachten. Für eine semi-klassische Erklärung des Quanten-Hall-Effekts betrachten wir Elektronen in einem senkrechten Magnetfeld. Der Hamilton-Operator ist

$$H = \frac{(\vec{p} + e\vec{A})^2}{2m^*},$$

wobei $\vec{A}(x, y, z) = (-By, 0, 0)^T$ das Vektorpotential des Magnetfelds sei mit B als Betrag des Felds. Mit dem Separationsansatz $\psi(x, y) = \exp(ik_x x)\phi(y)$ erhält man folgendes Eigenwertproblem:

$$\left[\frac{p_y^2}{2m^*} + \frac{1}{2}m^*\omega_c^2(y - y_0)^2\right]\phi(y) = E\phi(y)$$

mit $y_0 = \frac{\hbar k_x}{eB}$.

a) Geben Sie die zugehörigen Eigenenergien (Landau-Niveaus) an.

b) Vergleichen Sie die Verteilung der Zustände im $\vec{k}$-Raum ohne angelegtes Magnetfeld mit der Situation mit Magnetfeld.

c) Zeigen Sie, dass der Entartungsgrad der Landau-Niveaus $\frac{\Phi}{\Phi_0}$ ist, wobei Φ der magnetische Fluss durch die Probe und $\Phi_0 = \frac{h}{e}$ das magnetische Flussquant ist. Definieren Sie einen Füllfaktor ν, der angibt, wieviele Landau-Niveaus in einer Probe mit Elektronendichte n_e besetzt sind.

d) Schreiben Sie den klassischen Hall-Widerstand $\rho_{xy} = \frac{B}{en_e}$ als Funktion von ν.

e) Experimentell findet man nicht nur einzelne diskrete Werte von $\rho_{xy}(B)$, sondern Plateaus. Berechnen Sie zur Erklärung dieses Befunds die Zustandsdichte der Landau-Niveaus und begründen Sie damit außerdem, warum ν nur ganzzahlige Werte annimmt.

Aufgabe 2: Ferromagnetismus — 5 Punkte

Die Austauschenergie zweier Gitteratome mit den Spinvektoren $\vec{S}_1$ und $\vec{S}_2$ mit der Wechselwirkungskonstante A sei:

$$E_A = -2A\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass sich die gesamte Austauschenergie eines Gitteratoms mit allen seinen nächsten Nachbarn durch ein Austauschfeld B_A beschreiben lässt:

$$B_A = \frac{2zA}{ng^2\mu_B^2}\vec{M} \tag{2}$$

Dabei sei z die Anzahl der nächsten Nachbarn und $\vec{M} = -ng\mu_B\langle\vec{S}_i\rangle$ die Magnetisierung des Gesamtsystems.
Hinweis: Überlegen Sie sich dafür welche Energie der magnetische Dipol eines einzelnen Spins in einem äußeren Magnetfeld besitzt.

Aufgabe 3: Dipolfeld — 5 Punkte

Ein magnetischer Dipol $\vec{\mu}$ erzeugt in seiner Umgebung das Magnetfeld

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{\mu} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{\mu}}{r^5} \,. \tag{3}$$

a) Berechnen Sie für die Ferromagnete Eisen und Nickel, welche Feldstärke ein Atom mit dem magnetischen Moment $\mu \approx \mu_{\mathrm{B}}$ am Ort eines Nachbaratoms maximal erzeugen kann.
Gitterkonstanten: Fe: 2,866 Å (bcc), Ni: 3,524 Å (fcc)

b) Welchen Wert hat das Verhältnis der magnetischen Energie zur thermischen Energie bei der Curie-Temperatur $T_{\mathrm{C}} \approx 1000$ K? Kann die Kopplung magnetischer Momente in Ferromagneten durch diese klassische Dipol-Dipol Wechselwirkung erklärt werden?