12. Übungsblatt zu FKP WS 2021/22

Ausgabe:10.01.2022 **Prof. D. Suter**

Abgabe: 17.01.2022

Aufgabe 1: Dotierte Halbleiter **(10 Punkte)**

Ein Halbleiter wird mit Donatoren der Dichte N_D dotiert. Zwischen der Unterkante des Leitungsbandes und dem Grundniveau der Donatoren liegt die Energielücke $E_d = E_c - E_D$.

a) Zeigen Sie, dass die Ladungsträgerdichte ohne Beiträge der intrinsischen Leitfähigkeit durch

$$n\,(T) = \frac{2N_D}{1 + \sqrt{1 + 4\frac{N_D}{n_0}\exp(\frac{E_d}{k_B T})}} \qquad (1)$$

ausgedrückt werden kann, wobei $n_0 = 2\left(\frac{m_e^* k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$ und m_e^* die effektive Elektronenmasse ist.

b) Skizzieren Sie die Dichte $n\,(T)$ der freien Elektronen aufgetragen gegen die inverse Temperatur mit Beiträgen der intrinsischen Leitfähigkeit. Teilen Sie den Verlauf in charakteristische Abschnitte ein und erklären Sie diese. Zeigen Sie, welche Abschnitte durch die Formel (1) beschrieben werden.

Für die folgenden Aufgaben wird angenommen, dass ein Halbleiter mit einer temperaturunabhängigen Bandlücke ($E_g = 1{,}42$ eV) p-dotiert ist. Die Akzeptorendichte ist $N_A = 10^{18}$ cm^{-3}.

c) Wie groß ist die Elektronenkonzentration n im Vergleich zu dem undotierten Halbleiter bei Raumtemperatur $T = 300$ K? Gehen Sie davon aus, dass alle Donatoren vollständig ionisiert sind, so dass $p \approx N_A$. Die effektiven Massen der Elektronen und Löcher sind jeweils $m_e^* = 0{,}063 \cdot m_0$ und $m_h^* = 0{,}53 \cdot m_0$, wobei m_0 die freie Elektronenmasse ist.

d) Wie groß ist die elektrische Leitfähigkeit für den dotierten und undotierten Halbleiter? Angenommen wird, dass die Dotierung die Beweglichkeit ($\mu_e = 1000$ cm^{2}V^{-1}s^{-1} und $\mu_h = 500$ cm^{2}V^{-1}s^{-1}) nicht ändert.

Aufgabe 2: Magnetismus: Brillouin-Funktionen, Hund‘sche Regeln **(10 Punkte)**

Eine allgemeine Auswertung des mittleren magnetischen Moments $\langle\mu\rangle$ eines paramagnetischen Atoms mit einem Gesamtdrehimpuls J und dem Landé-Faktor g ist gegeben durch

$$\langle\mu\rangle = g \cdot \mu_B \cdot J \cdot B_J(x) \qquad \text{mit} \qquad x = g \cdot J \cdot \frac{\mu_B \cdot B}{k_B \cdot T}$$

Die Abhängigkeit dieser Größe von Temperatur und Stärke des Magnetfeldes wird durch die Brillouin-Funktion $B_J(x)$ beschrieben:

$$B_J(x) = \frac{2J+1}{2J}\coth\left(\frac{2J+1}{2J}\ x\right) - \frac{1}{2J}\coth\left(\frac{1}{2J}\ x\right)$$

a) Zeigen Sie, dass diese Brillouin-Funktion im Grenzfall x <<1 einen linearen Verlauf

$$B_J(x) \approx \frac{J+1}{3J}x$$

aufweist, während sie sich für x >>1 asymptotisch dem Wert 1 nähert. *(Hinweis: Entwickeln Sie in letzterem Fall den Nenner der Exponentialdarstellung von coth(x)).* Skizzieren Sie den Verlauf der Brillouin-Funktion $B_J(x)$ für $J = \frac{1}{2};\ 4.$

b) Nach einer klassisch durchgeführten Rechnung von Langevin besitzt ein System von N Teilchen mit einem magnetischen Moment von jeweils μ im Regime $\mu B \ll k_B T$ eine Magnetisierung

$$M = \frac{\chi_m B}{\mu_0} \quad \text{mit } \chi_m = \frac{C}{\mu_0 T} \text{ und } C = \mu^2 \frac{N}{V}\frac{\mu_0}{3k_B}$$

Vergleichen Sie die Magnetisierung mit dem quantenmechanischen Resultat aus a). Zeigen Sie, dass sich ein mit der Langevinschen Rechnung übereinstimmendes Resultat erzielen lässt, wenn man die Größe $\mu_{eff} = g\sqrt{J(J+1)}\ \mu_B$ als effektiven Betrag des magnetischen Moments ansieht.

c) Berechnen Sie mit Hilfe der Hund'schen Regeln den Landé-Faktor g und das effektive magnetische Moment der Ionen La^{3+} und Pr^{3+}.
Für den Landé-Faktor gilt: $g = 1 + \frac{J(J+1)+S(S+1)-L(L+1)}{2J(J+1)}$
Die experimentalen Werte sind: $\mu(La^{3+})=0$; $\mu(Pr^{3+}) = 3{,}5 \cdot \mu_B$.

d) Weshalb liefern abgeschlossene Schalen eines Atoms keinen Beitrag zum Langevin-Paramagnetismus einer Substanz? Welchen Beitrag zur magnetischen Suszeptibilität liefern sie dagegen auf jeden Fall?