Einführung in die Festkörperphysik WiSe 2021/2022

8. Übungsblatt

Ausgabe: 29.11.2021
Abgabe: 06.12.2021

Aufgabe 1: Flüssiges ^{3}Helium als Fermigas (6 Punkte)

Das Atom ^{3}He besitzt (Kern-)Spin 1/2 und hat folglich fermionischen Charakter. Die Dichte von flüssigem ^{3}He in der Nähe des absoluten Nullpunkts ist $81\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Nehmen Sie näherungsweise an, dass die Helium-Atome freie Teilchen sind.
(a) Berechnen Sie die Fermi-Energie E_F, die Fermi-Temperatur T_F und die Fermi-Geschwindigkeit v_F.
(b) Berechnen Sie die molare Wärmekapazität dieses Fermigases für $T << T_F$. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem unterhalb von 50mK gemessenen Wert $\frac{C_{mol}}{RT} = 2,9\,\mathrm{K}^{-1}$ (wobei $R = 8,31\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{Mol\cdot K}}$ die Gaskonstante ist). Geben Sie einen möglichen Grund für die Diskrepanz der beiden Werte an.

Aufgabe 2: Temperaturabhängigkeit des chemischen Potentials (7 Punkte)

Das chemische Potential μ eines Fermi-Gases in 3 Dimensionen ist dadurch bestimmt, dass das Integral über alle besetzten Zustände (also das Produkt aus Zustandsdichte $D(E)$ und Besetzungswahrscheinlichkeit $f(E)$) die Elektronenzahl N ergeben muss:

$$N = \int_0^\infty D(E)f(E)dE$$

(a) Berechnen Sie zunächst das chemische Potential $\mu(T)$ bei der Temperatur $T = 0$. Dies wird als Fermi-Energie $E_F = \mu(0)$ bezeichnet.

Zur Berechnung des Integrals bei endlichem T verwendet man die Sommerfeld-Entwicklung:

$$\int_0^\infty D(E)f(E)dE \approx \int_0^\mu D(E)dE + (k_BT)^2\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{\mathrm{d}D(E)}{\mathrm{d}E}\right)_{E=\mu} + \mathcal{O}\left(\frac{k_BT}{\mu}\right)^4$$

Dieser Ausdruck kann zu

$$N = \int_0^{E_F} D(E)dE + D(E_F)(\mu - E_F) + (k_BT)^2\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{\mathrm{d}D(E)}{\mathrm{d}E}\right)_{E=E_F}$$

angenähert werden.
(b) Zeigen Sie, dass für die Temperaturabhängigkeit des chemischen Potentials gilt:

$$\mu(T) = E_F\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{T}{T_F}\right)^2\right],$$

wobei $T_F = \frac{E_F}{k_B}$ ist.
(c) Die Fermi-Temperatur von Aluminium ist $T_F = 136000$K. Berechnen Sie die relative Abweichung des chemischen Potentials bei Raumtemperatur $\mu(300\mathrm{K})$ von der Fermi-Energie E_F.

Aufgabe 3: Verschiebung der Fermi-Kugel durch ein elektrisches Feld (7 Punkte)

Es soll abgeschätzt werden, welche elektrischen Felder nötig sind, um in Kupfer die Fermi-Kugel um 1% des Fermi-Wellenvektors k_F zu verschieben. Gehen Sie für die Bestimmung der Elektronendichte davon aus, dass ein Leitungselektron pro Atom frei beweglich ist. Weiter beträgt das Molgewicht von Kupfer $M = 63{,}54\, g/mol$, die Dichte ist $\rho = 8{,}96\, g/cm^3$.

(a) Verwenden Sie für die Berechnung der feldinduzierten Verschiebung der Fermi-Kugel den Relaxationszeitansatz. Welches elektrische Feld ist nötig, um die Fermi-Kugel um 1% des Fermi-Wellenvektors k_F zu verschieben? Benutzen Sie als elektrische Leitfähigkeit $\sigma = 6 \times 10^5\, (\Omega cm)^{-1}$ sowie die Fermi-Energie $E_F = 7\, eV$.

(b) Wie gross ist die elektrische Stromdichte bei dieser Feldstärke?

(c) Benutzen Sie nun die Regel von Dulong-Petit, um abzuschätzen, wie schnell Kupfer unter diesen Bedingungen (ausgehend von Raumtemperatur) schmelzen würde? Bilden Sie dazu, ausgehend von $P = U \cdot I$, einen Ausdruck für die vom Strom deponierte Leistungsdichte. Der Schmelzpunkt beträgt $T_S = 1085°C$. Wärmeleitung ist zu vernachlässigen.