

Ausgabe: 22.11.2021

Abgabe: 29.11.2021

Aufgabe 1: Impuls von Phononen

3 Punkte

Zeigen Sie, dass Phononen keinen physikalischen Impuls besitzen. Benutzen Sie zur Berechnung des Impulses:

$$p = M \frac{d}{dt} \sum_n u_n \quad (1)$$

M sei die Masse und u_n die Auslenkung eines Atoms. Verwenden Sie für die u_n den Ansatz einer ebenen Welle. Welche Wellenzahl k entspricht einer gleichförmigen Translation des Kristalls als Ganzes?

Aufgabe 2: Zustandsdichte der Phononen einer 1D Kette

8 Punkte

Unter der Voraussetzung, dass nur Kräfte zwischen direkt benachbarten Atomen wirken, lautet die Dispersionsrelation einer linearen Kette von Atomen mit Abstand a :

$$\omega = \omega_{max} \left| \sin \left(\frac{ka}{2} \right) \right| \quad (2)$$

Hierbei ist ω_{max} die maximale Frequenz im Phononenspektrum der Kette.

- Berechnen Sie die reale Zustandsdichte $D(\omega)$ der Phononen.
- Berechnen Sie die Zustandsdichte $D_D(\omega)$ der Phononen im Debye-Modell und vergleichen Sie diese mit Ihrem Ergebnis aus a), wobei für die Schallgeschwindigkeit gilt $v_s = \frac{1}{2} \omega_{max} a$.
- Zeigen Sie, dass die Anzahl der Schwingungszustände gleich der Anzahl der (eindimensionalen) Freiheitsgrade der N -atomigen Kette ist, also $\int_0^{\omega_{max}} D(\omega) d\omega = N$.
In der Debye-Näherung wird dies dadurch berücksichtigt, dass die Zustandsdichtefunktion bei der Debyefrequenz ω_D abgeschnitten wird. Berechnen Sie ω_D und skizzieren Sie den Verlauf der beiden Zustandsdichtefunktionen.
- Berechnen Sie die Phononzustandsdichte des Debye-Modells in einem zweidimensionalen Kristall.

Aufgabe 3: Zustandsdichte eines freien Elektronengases

5 Punkte

In dieser Aufgabe soll die Zustandsdichte eines freien Elektronengases etwas allgemeiner für mehrdimensionale Systeme behandelt werden.

a) Berechnen Sie

$$D(\vec{k}) d^n k = D(E) dE \quad (3)$$

die Zustandsdichtefunktionen $D(\vec{k})$ und $D(E)$ für ein n -dimensionales System freier **Elektronen** mit Gesamtvolumen V . Dabei ist $d^n k$ ein Volumenelement des k -Raums, für drei Dimensionen gilt beispielsweise $d^3 k = dk_x dk_y dk_z$. Gilt ihr hergeleitetes Ergebnis für die Zustandsdichte nur für freie Elektronen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Nutzen Sie die Isotropie des Systems durch Verwendung von Kugelkoordinaten aus. Die Oberfläche in einer n -dimensionalen Kugel mit Radius r wird mit einer sogenannten $n-1$ -Sphäre mit Flächeninhalt $S_{n-1}(r) = 2 \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} r^{n-1}$ beschrieben.

b) Geben Sie die Zustandsdichtefunktion $D(E)$ in $n = 1$, $n = 2$ und $n = 3$ Dimensionen explizit an und skizzieren Sie diese. Für die Gammafunktion können Sie dabei folgende Werte verwenden: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(\frac{2}{2}) = 1$, $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.