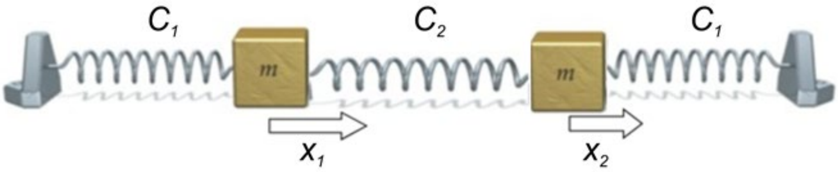
1. Übung zu FKP WS 2021/22

Ausgabe: 11.10.2021 Prof. D. Suter
Abgabe: 18.10.2021

1. Symmetrie **(4 Punkte)**
Es gibt drei verschiedene Arten von Symmetrieelementen (Punkte, Achsen oder Ebenen) und fünf Symmetrieoperationen. Symmetrieoperationen werden mit den Symbolen bezeichnet:
- Identität e
- Inversion an einem Inversionszentrum i
- Drehung um eine Drehachse C_n
- Spiegelung an einer Spiegelebene σ
- Drehspiegelung an einer Drehspiegelachse S_n

Welche Symmetrieelemente finden sich in den folgenden Gegenständen:
a) vierbeiniger, rechteckiger Tisch
b) vierbeiniger, quadratischer Tisch
c) Stuhl
d) Würfel mit Zahlen

2. Gekoppelte Federschwinger **(6 Punkte)**
Zwei Federpendel (Massen m und m, Federkonstanten C_1 und C_2) werden miteinander verbunden. Die Bewegung der Massen erfolgt reibungsfrei entlang der Achse.



a) Stellen Sie die Differenzialgleichungen für die Bewegung der Massen auf. Entkoppeln Sie durch Übergang zu Normalkoordinaten $z_1 = x_1 + x_2$ und $z_2 = x_1 - x_2$ die Differenzialgleichungen und zeigen Sie, dass die Kreisfrequenzen der Normalschwingungen

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{C_1}{m}};\ \omega_2 = \sqrt{\frac{C_1 + 2C_2}{m}}$$

sind.
Geben Sie die allgemeinen Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ der Differenzialgleichungen an.

b) Zeigen Sie, dass für die Anfangsbedingungen

$$x_1(0) = x_2(0) = X, \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$$

die Massen mit der Kreisfrequenz ω_1 und für die Anfangsbedingungen

$$x_1(0) = -x_2(0) = X, \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$$

mit der Kreisfrequenz ω_2 schwingen. Erklären Sie, weshalb $\omega_2 > \omega_1$ gilt und ω_1 unabhängig von C_2 ist.

3. Zeitabhängige Schrödingergleichung **(2 Punkte)**

Die zeitabhängige Schrödingergleichung lautet in einer Dimension:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2\Psi(x,t)}{dx^2} + V(x) \cdot \Psi(x,t) = i\hbar \frac{d\Psi(x,t)}{dt}$$

a) Zeigen Sie, dass für ein freies Teilchen ($V(x) = 0$) die Wellenfunktion einer ebenen Welle

$$\Psi(x,t) = A \cdot e^{ikx - i\omega t}$$

die Gleichung erfüllt.

b) Welche physikalischen Größen sind bei dieser Gleichung zeitlich invariant?

4. Das Teilchen im eindimensionalen Kasten **(8 Punkte)**

Ein Teilchen der Masse m befindet sich in einem eindimensionalen Kasten der Länge L entlang der x-Koordinate. Das Potential ist gegeben durch

$$V(x) = \begin{cases} 0 & f\text{ür } 0 \leq x \leq L \\ \infty & sonst \end{cases}$$

Die zeitunabhängige Schrödingergleichung lautet

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = [E - V(x)] \cdot \psi(x)$$

a) Was sind die Energie-Eigenwerte, E_n, die zeitunabhängigen und zeitabhängigen Wellenfunktionen, $\psi_n(x)$ und $\Psi_n(x,t)$? Welche Werte kann n annehmen?

b) Wie ist die Normierungskonstante zu wählen, damit die Aufenthaltswahrscheinlichkeit auf 1 normiert ist?

c) Skizzieren Sie die ersten vier Wellenfunktionen.

d) Warum hat eine Billardkugel auf dem Billardtisch keine diskrete Energieniveaus und zeigt damit keinen Wellencharakter?