11. Übung zur Festkörperphysik WS 2016/17

Ausgabe: 13.01.2017
Abgabe: bis 20.01.2017 12:00 Uhr — Prof. Dr. D. Suter
Briefkästen: 247-249

Aufgabe 1: Effektive Masse — 3 Punkte

Der Tensor der effektiven Masse m^*_{ij} ist gegeben durch

$$m^*_{ij} = \hbar^2 \left(\frac{\partial^2 E(k)}{\partial k_i \partial k_j} \right)^{-1}_{ij} . \tag{1}$$

a) Berechnen Sie die effektive Masse für freie Elektronen.

b) Berechnen Sie die effektive Masse für Elektronen in einem Kristall mit kubisch primitiven Gitter für $\vec{k} = 0$ und $\vec{k} = \pi/a \cdot \vec{1}$ (Gitterkonstante a).Die entsprechende Dispersionsrelation (aus dem tight-binding-Modell) lautet $E(\vec{k}) = -E_0 \sum_{i=1}^{3} cos(k_i a)$.

c) Erläutern Sie das Konzept der effektiven Masse.

Aufgabe 2: Bandstrukturen in 1D — 3 Punkte

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass sich das Potential

$$U(x) = \sum_G U_G \exp(\mathrm{i}kx) \tag{2}$$

bei einem harmonischen Potential durch nur einem Term $U_G = U_{-G} =: U$ beschreiben lässt. Damit ergibt sich die Energie eines Elektrons am Rand der 1. Brioullin-Zone zu

$$E = \lambda_{G/2} \pm U \tag{3}$$

mit $\lambda_x = \hbar^2 x^2 / 2m$. Dementsprechend gibt es 2 verschiedene Energiebänder.

Jetzt soll ein Potential betrachtet werden, bei dem auch Terme 2. Ordnung hinzukommen: $U_{2G} = U_{-2G} =: V$. Als Ansatz für die Elektronenwellenfunktion werden ebene Wellen benutzt

$$\Psi(x) = \sum_K C(K) \exp(\mathrm{i}Kx) \tag{4}$$

a) Welcher Zusammenhang zwischen K und G folgt aus dem Blochtheorem? Wie sieht dieser am Zonenrand aus?

b) Stellen Sie das Gleichungssystem für die Koeffizienten $C(K)$ in Matrixform auf. Welche minimale Dimension muss die so erhaltene Matrix haben, um den Effekt des 2. Potentialterms zu berücksichtigen?

c) Für $V = U/10$ ergeben sich die Eigenwerte

$$E_{1,\pm} = \frac{1}{10} \left(50\lambda_{G/2} - 5U \pm \sqrt{(1600\lambda_{G/2}^2 + 400\lambda_{G/2}U + 53U^2)} \right) \tag{5}$$

$$E_{2,\pm} = \frac{1}{10} \left(50\lambda_{G/2} - 5U \pm \sqrt{(1600\lambda_{G/2}^2 - 400\lambda_{G/2}U + 73U^2)} \right) \tag{6}$$

Leiten Sie daraus unter der Näherung $\lambda_k >> U$ ab, dass es zu einer Aufspaltung in 3 Bänder mit Bandlücken von $U/5$ kommt.

d) Wie verhält sich die Dispersionsrelation bei großem Abstand zu den Zonengrenzen? Skizzieren Sie die Energie der Elektronen $E(k)$ im Intervall $[0, \pi/a]$.

Aufgabe 3: Bloch-Oszillation — 2 Punkte

Elektronen bewegen sich in einem Halbleiter-Übergitter anhand eines schwachen periodischen Potentials mit der Gitterkonstante a. Das unterste Band ist mit Elektronen der Dichte n gefüllt. Ein elektrisches Feld E liegt entlang der x-Richtung an. Vernachlässigen Sie die Elektronenstreuung und nehmen Sie an, dass die Temperatur niedrig ist.

a) Erläuter Sie zunächst prinzipiell, wie es zu Bloch-Oszillationen kommt.

b) Berechnen Sie die Grundfrequenz der Schwingung für $a = 50\,\text{Å}$, und $E = 5 \cdot 10^4\,\text{V/cm}$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit einer typischen Relaxationszeit der Elektronen. Warum werden zur experimentellen Beobachtung der Oszillation spezielle Halbleiterstrukturen benötigt?