

12. Übung zur Einführung in die Festkörperphysik

2012

WS

Ausgabe: 11.01.2012

Abgabe: bis 18.01.2012, 10:15 Uhr, Kästen 246-250

Prof. Dr. D. Suter

Aufgabe 1: Elektronengas im Magnetfeld

4 Punkte

Die Energie-Wellenvektor-Beziehung $E(k) = \hbar^2 k^2 / (2m)$ eines dreidimensionalen freien Elektronengases geht bei Anwesenheit eines in z -Richtung angelegten Magnetfeldes über in den Ausdruck

$$E(l, k_z) = \left(l + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c + \frac{\hbar^2}{2m} k_z^2, \quad (1)$$

wobei $\omega_c = \frac{eB}{m}$ die Zyklotronfrequenz der Elektronen ist.

(a) Skizzieren Sie schematisch, wie sich das Energieschema $E(k_z)$, die Gestalt der Fermi-Oberfläche, sowie die Besetzung von Zuständen in der Ebene $k_z = 0$ eines freien Elektronengases ändern, wenn ein in z -Richtung weisendes Magnetfeld angelegt wird.

(b) Gleichung (1) lässt sich für Elektronen im Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$ formal auch als

$$E(k_\perp, k_z) = \frac{\hbar^2}{2m} (k_\perp^2 + k_z^2) \quad (2)$$

schreiben, wobei k_\perp die zur Richtung des Magnetfeldes senkrechte Komponente des Wellenvektors darstellt. Berechnen Sie diesen Wert $k_\perp(l)$, sowie die Größe der dazugehörigen, im k -Raum umschlossenen Fläche $A_k(l)$!

(c) Zeigen Sie, dass es sich bei dem von einer Elektronenbahn im realen Raum umschlossenen magnetischen Fluss $\phi(l) = BA(l)$ stets um ein ungeradzahliges Vielfaches des magnetischen Flussquants $\phi_0 = \frac{\pi\hbar}{e}$ handelt.

Aufgabe 2: Magnetische Momente von 4f-Ionen

2 Punkte

(a) Berechnen Sie den Landé'schen g -Faktor und das effektive magnetische Moment

$$\mu_{eff} = g\sqrt{J(J+1)}\mu_B$$

der 4f-Ionen La^{3+} , Pr^{3+} und Tb^{3+} . Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den experimentell ermittelten Werten $\mu_{exp}(La^{3+}) = 0$, $\mu_{exp}(Pr^{3+}) = 3.6\mu_B$ und $\mu_{exp}(Tb^{3+}) = 9.7\mu_B$.

(b) Weshalb liefern abgeschlossene Schalen eines Atoms grundsätzlich keinen Beitrag zum Langevin-Paramagnetismus einer Substanz? Welchen Beitrag zur magnetischen Suszeptibilität liefern Sie dagegen in jedem Fall?

Aufgabe 3: Brillouinfunktion

3 Punkte

Eine allgemeine Auswertung liefert für die z -Komponente des mittleren magnetischen Moments eines Atoms mit einem Gesamtdrehimpuls J

$$\langle \mu_z \rangle = g\mu_B J B_J(x)$$

Die Abhängigkeit dieser Größe von der Temperatur sowie von der Stärke des angelegten Magnetfeldes wird durch die Brillouinfunktion

$$B_J(x) = \frac{2J+1}{2J} \coth\left(\frac{2J+1}{2J}x\right) - \frac{1}{2J} \coth\left(\frac{1}{2J}x\right)$$

gegeben, wobei $x = (g\mu_B JB)/(k_B T)$.

(a) Zeigen Sie, daß die Brillouinfunktion im Grenzfall $x \ll 1$ einen linearen Verlauf

$$B_J(x) \approx \frac{J+1}{3J}x$$

aufweist, während sie sich für $x \gg 1$ gemäß

$$B_J(x) \approx 1 - \frac{1}{J} \exp\left(-\frac{x}{J}\right)$$

asymptotisch dem Wert 1 nähert. Skizzieren Sie den Verlauf der Brillouinfunktion $B_J(x)$ im Bereich $0 \leq x \leq 5$ für verschiedene Werte der Gesamtdrehimpulsquantenzahl J .

(b) Zeigen Sie, dass die magnetische Suszeptibilität paramagnetischer Stoffe für nicht zu tiefe Temperaturen und nicht zu hohe Magnetfelder (also $x \ll 1$) dem Curie-Gesetz $\chi_{para} = \text{const}/T$ gehorcht.