

4 Leitungen

4.1 Signalausbreitung

4.1.1 Langsame vs. schnelle Signale

In der Elektronik muss zwischen stationären oder langsam veränderlichen Signalen und schnellen Signalen unterschieden werden. Bei (quasi-)stationären Signalen spielt die Ausbreitung des Signals keine Rolle, d.h. Geschwindigkeit der Signalausbreitung und Dimension der Schaltung sind irrelevant. Bei schnellen Signalen ist dies nicht mehr der Fall, hier muss die Signalausbreitung explizit berücksichtigt werden. Prinzipiell bedeutet dies, dass man die Maxwell-Gleichungen unter den Randbedingungen der Schaltung lösen muss.

Für die Grenze zwischen diesen beiden Bereichen spielt die Dimension der Schaltung eine wichtige Rolle: Man spricht von schnellen Signalen dann, wenn die relevante Zeitskala (z.B. die inverse Frequenz einer harmonischen Schwingung) vergleichbar oder kürzer ist als die Zeit, welche Licht benötigt, um eine Strecke von der Größe der Schaltung zurückzulegen. Für die Abschätzung der relevanten Größenordnung hilft die Faustregel, dass bei 300 MHz die Vakuum-Wellenlänge rund 1 m beträgt.

Abb. 4.1 zeigt als Beispiel die Verteilung des Magnetfeldes in einem Mikrowellen-Resonator. Dafür müssen die elektrischen Parameter (Leitfähigkeit, Dielektrizitätskonstante) an jedem Punkt der Struktur bekannt sein. Die numerische Lösung der Maxwell-Gleichungen wird mit Finite-Elemente Methoden durchgeführt und ist numerisch recht aufwändig.

Für viele Anwendungen sind solch aufwändige Techniken jedoch nicht notwendig. Wir werden in diesem Kapitel einfache Modelle diskutieren, welche für die Mehrheit der täglich auftretenden Probleme genügen. Sie liefern eine einfache, analytische Behandlung der üblichen Probleme und zeigen, wel-

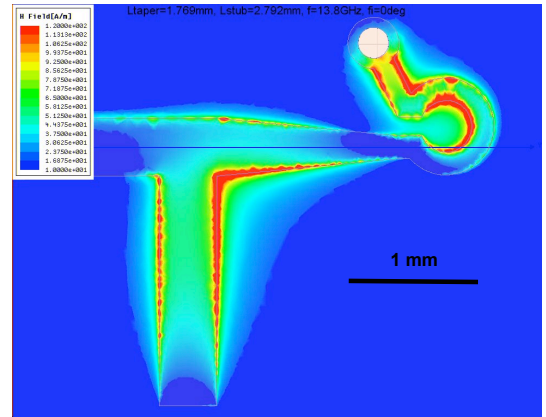


Abbildung 4.1: Magnetfeldverteilung in einem Mikrowellenresonator. Die Frequenz beträgt 14 GHz.

che Regeln beim Bau von elektrischen Schaltungen berücksichtigt werden müssen.

4.1.2 Leitungen

Die Übertragung von schnellen Signalen zwischen unterschiedlichen Bauteilen erfolgt nicht automatisch. Elektronische Komponenten oder auch schon die Leitungen, welche die Bauteile verbinden, können schnelle Signale abschwächen oder reflektieren. Man benötigt deshalb angepasste Leitungen für die Übertragung schneller Signale.

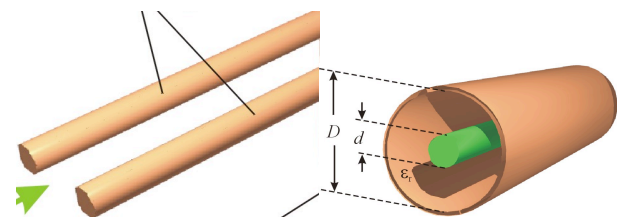


Abbildung 4.2: Zwei Arten von Leitungen für schnelle Signale.

Abbildung 4.2 zeigt zwei Typen von Leitungen, die

für die Übertragung schneller Signale geeignet sind, sofern bestimmte Beziehungen zwischen den geometrischen und den dielektrischen Parametern erfüllt sind. Solche Leiterstücke können als übergangssymmetrische Vierpole diskutiert werden.

4.2 Wellenausbreitung

4.2.1 Telgraphengleichung

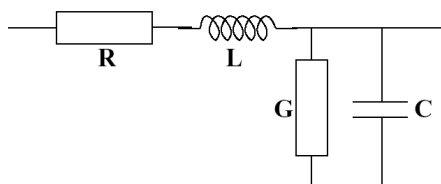


Abbildung 4.3: Ersatzschaltbild für ein Leiterstück.

Wir betrachten die Signalausbreitung entlang eines Leiterstücks. Für das Leiterstück verwenden wir das Ersatzschaltbild von Abb. 4.3: es stellt den eigentlichen Leiter dar als Reihenschaltung einer Spule L und eines Widerstandes R . Zudem existiert i.A. eine endliche Leitfähigkeit G zur Masse, resp. zum Gegenleiter, sowie eine Kapazität C . Dabei sind alle diese Impedanzen proportional zur Länge des betrachteten Leiterstücks.

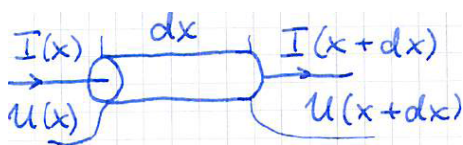


Abbildung 4.4: Strom und Spannung in einem Leiterstück.

Der Spannungsabfall über dem Leiterstück von Abb. 4.3 ist das Produkt aus Strom und Impedanz,

$$U(x+dx) - U(x) = -(R+i\omega L)I.$$

Für ein infinitesimales Leiterstück können wir somit schreiben

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = (R+i\omega L)I dx. \quad (4.1)$$

Im Folgenden verwenden wir jeweils Impedanzen, die auf die Länge des Leiterstücks normiert sind, d.h. wir schreiben für $R dx$ jeweils nur noch R , und analog für $L dx$, $C dx$ und $G dx$.

Die Änderung des Stroms über das Leitungsstück ergibt sich aus der Knotenregel:

$$-\frac{\partial I}{\partial x} = (G+i\omega C)U.$$

Setzen wir das in den Ausdruck für $\partial U/\partial x$ ein, so erhalten wir

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = (R+i\omega L)(G+i\omega C)U.$$

Setzen wir umgekehrt die Ableitung der Spannung in den Ausdruck für den Strom ein, so erhalten wir eine entsprechende Gleichung für den Strom. Diese Gleichung für die Ausbreitung der Spannung entlang eines Leiters wird als Telegraphengleichung bezeichnet. Sie stellt eine eindimensionale Wellengleichung dar. Die Lösung ist

$$U(x,t) = U_{\pm} e^{i\omega t \pm \gamma x}.$$

Die beiden Lösungen entsprechen jeweils einer gedämpften harmonischen Welle, die sich nach links, resp. rechts entlang der Leitung bewegt. Die Ausbreitungskonstante oder Propagationskonstante γ beträgt

$$\gamma = \sqrt{(R+i\omega L)(G+i\omega C)} = \alpha + i\beta.$$

Hier stellt α die Dämpfungskonstante dar, $\beta = 2\pi/\lambda$ die Wellenzahl. Die Phasengeschwindigkeit v_P der Welle erhält man wie üblich aus dem Verhältnis $v_P = \omega/k = \omega/\beta$.

4.2.2 Wellenwiderstand

Der Wellenwiderstand ist gleich der Impedanz $Z = U/I$ der Leitung. Aus der räumlichen Ableitung von U in Gl. (4.1) erhalten wir

$$\gamma U = (R+i\omega L)I$$

und somit für die Impedanz

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{R+i\omega L}{\gamma} = \sqrt{\frac{R+i\omega L}{G+i\omega C}}.$$

Im Idealfall verlustfreier Leitung, d.h. $R = G = 0$ wird offenbar

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

4.2.3 Ausbreitungsgeschwindigkeit

Für die Ausbreitungskonstante γ erhalten wir in diesem Fall

$$\gamma = \sqrt{(0 + i\omega L)(0 + i\omega C)} = \sqrt{-\omega^2 LC} = i\beta.$$

Sie wird also rein imaginär, was einer ungedämpften Welle entspricht.

Aufgelöst nach der Frequenz erhalten wir

$$\omega = \frac{\beta}{\sqrt{LC}}.$$

Hierbei ist zu beachten, dass L und C auf die Länge des Leiters normiert sind, ihre Einheiten also H/m, resp. F/m betragen. Die Phasengeschwindigkeit beträgt somit

$$v_0 = \lambda v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Für typische Koaxialkabel mit $\epsilon \approx 2,5$ beträgt der Kapazitätsbelag (=Kapazität pro Länge) etwa 100 pF/m, der Induktivitätsbelag ≈ 250 nH/m. Damit erhält man numerische Werte in der Größenordnung von

$$v_0 \approx \frac{2}{3}c \approx \frac{20 \text{ cm}}{\text{ns}} \approx \frac{1 \text{ m}}{5 \text{ ns}}.$$

4.2.4 Koaxialkabel

Zu den wichtigsten Leitungen für schnelle Signale gehören Koaxialkabel.

Diese bestehen aus einem Innenleiter mit Außendurchmesser d und einem Außenleiter mit Innendurchmesser D . Zwischen den beiden befindet sich ein Dielektrikum mit Dielektrizitätskonstante ϵ . Damit beträgt die Kapazität zwischen den beiden Leitern pro Längeneinheit

$$C' = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon}{\ln \frac{D}{d}}$$

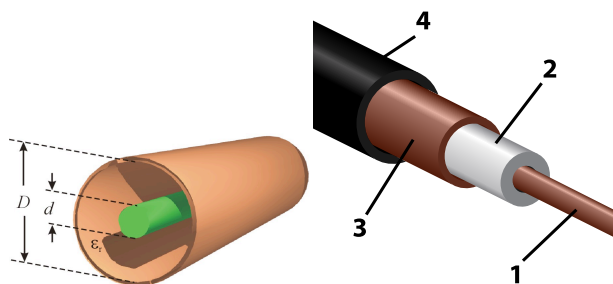


Abbildung 4.5: Koaxialkabel; links: Prinzip; rechts: schematischer Aufbau eines Kabels. 1 = Seele oder Innenleiter; 2 = Isolation oder Dielektrikum; 3 = Außenleiter oder Abschirmung; 4 = Schutzmantel.

und die Induktivität pro Länge

$$L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D}{d}.$$

Hier haben wir angenommen, dass die magnetische Suszeptibilität des Dielektrikums nahe bei 1 liegt. Damit wird die Impedanz des Kabels

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{\ln \frac{D}{d}}{2\pi} \right)^2}$$

oder

$$Z_0 = Z_0(\text{vac}) \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{D}{d} = \frac{60\Omega}{\sqrt{\epsilon}} \ln \frac{D}{d}.$$

Typische Zahlenwerte für ein Koaxialkabel mit $Z_0 = 50\Omega$, z.B. einen Typ RG 178 sind $R' = 0,45\Omega/\text{m}$, $L' = 240$ nH/m und $C' = 95$ pF/m. Als Vergleich: die Wellenimpedanz des Vakuums beträgt

$$Z_0(\text{vac}) = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377\Omega \approx 2\pi 60\Omega.$$

4.2.5 Dämpfung

Als nächstes berücksichtigen wir eine endliche Leitfähigkeit des Kabels, $R > 0$, vernachlässigen aber weiterhin die Leitfähigkeit zwischen den beiden Leitern, $G = 0$. Damit wird die Ausbreitungskonstante

$$\gamma_{G=0} = \sqrt{(R + i\omega L)(0 + i\omega C)} = \alpha + i\beta$$

mit

$$\alpha = \frac{\omega RC}{2\beta}$$

und

$$\beta = k = \sqrt{\frac{\omega^2}{2LC} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega C} \right)^2} \right)}.$$

Beide sind offenbar frequenzabhängig, d.h. es entsteht Dispersion.

Eine zusätzliche Frequenzabhängigkeit kommt durch den "Skin-Effekt" zustande. Bei hohen Frequenzen wird der Strom nur von der äußersten Schicht des Leiters geführt, da das Feld nicht in den Leiter eindringt. Die Dicke dieser Schicht beträgt

$$\delta_{\text{skin}} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}},$$

wobei wir wiederum angenommen haben, dass die magnetische Suszeptibilität vernachlässigt werden kann, $\mu_r \approx 1$. Die Dicke dieser Schicht nimmt somit mit zunehmender Frequenz ab und damit nimmt der Widerstand zu, $R_{\text{eff}} \propto 1/\delta_{\text{skin}}$. Dies führt zu einer erheblichen Signalreduktion. So beträgt die Dämpfung für ein Kabel des Typs RG 178 mit 100 m Länge bei einer Frequenz von 2 MHz 33%, bei 200 MHz aber etwa 99%.

4.2.6 Weitere Leitertypen

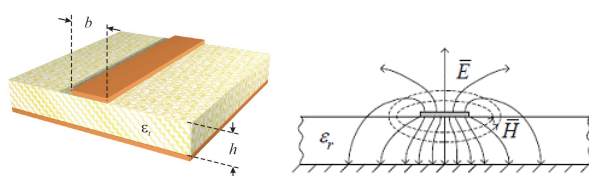


Abbildung 4.6: Geometrie eines Streifenleiters (links) und Feldlinien (rechts).

Bei gedruckten Schaltungen kommen vor allem Streifenleiter zum Einsatz. Auch hier muss die charakteristische Impedanz $Z_0 = \sqrt{L/C}$ durch die Wahl der Geometrie angepasst werden. Die relevanten

Größen für Induktivität und Kapazität sind die Breite b , der Abstand h zur Rückseite und die Dielektrizitätskonstante ϵ_r des Platinenmaterials:

$$Z_0 \approx \frac{87 \Omega}{\sqrt{\epsilon_r + 1,41}} \ln \left(\frac{5,98h}{0,8b + d} \right).$$

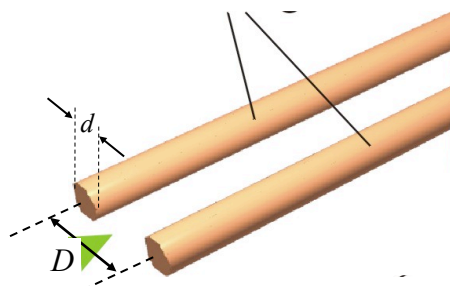


Abbildung 4.7: Paralleldraht-Leitung.

In Paar von parallelen zylindrischen Leitern kann auch so ausgelegt werden, dass eine bestimmte charakteristische Impedanz erreicht wird. Der Induktivitätsbelag ist hier durch den Drahtdurchmesser bestimmt, die Kapazität zwischen den Leitern durch den Durchmesser und den Abstand.

$$Z_0 = \frac{120 \Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \cosh^{-1} \frac{D}{d}.$$

Für den Fall, dass der Abstand groß ist im Vergleich zum Durchmesser, $D \gg d$, wird das in guter Näherung Abstand.

$$Z_0 \approx \frac{120 \Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \left(2 \frac{D}{d} \right).$$

Um Einkopplungen in die Leitung zu minimieren, werden die beiden Drähte eines Paares häufig gegeneinander verdreht. Man spricht dann von einem "twisted pair".

Bei einem Verdrehen der Leitungen ist der Abstand D meist nicht besonders gut definiert. Die Impedanz variiert somit, was zu Reflexionen führt. Im praktischen Einsatz werden die Drahtpaare außerdem meist abgeschirmt (STP = shielded twisted pair).

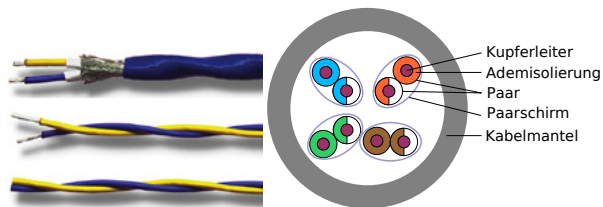


Abbildung 4.8: 'Twisted pair' (links) und abgeschirmtes Kabel mit mehreren verdrehten Drahtpaaren (rechts).

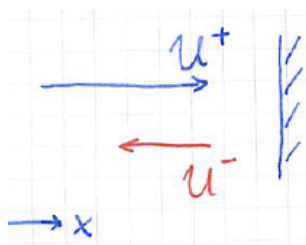


Abbildung 4.9: Reflexion bei einer Änderung des Wellenwiderstandes.

4.3 Endlich lange Leitungen

4.3.1 Reflexion

Breitet sich eine Welle in einem inhomogenen Medium aus, so wird sie gestreut; in der Optik, z.B., führt dies zu Reflexionen wenn der Brechungsindex ändert. Analog dazu führt eine Änderung der Wellenimpedanz zu einer Reflexion.

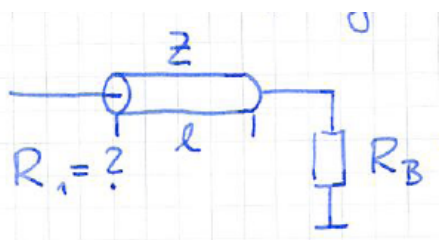


Abbildung 4.10: Leiterstück.

Wir betrachten ein Leiterstück der Länge l , Impedanz Z , welches mit einem Widerstand R_B abgeschlossen ist. Das Signal sei monochromatisch (Frequenz ω), und wir betrachten nur die räumliche Abhängigkeit. Wir erwarten 2 Wellen mit gleicher Frequenz und Wellenlänge, aber entgegengesetzter Aus-

breitungsrichtung. Die Spannung in der Leitung ist die Summe der Amplituden der beiden Wellen:

$$U(x) = U^+ + U^- = Ae^{-\gamma x} + Be^{+\gamma x}.$$

Der Strom ist die Differenz

$$I(x) = I^+ - I^- = \frac{1}{Z}(Ae^{-\gamma x} - Be^{+\gamma x}).$$

Bei $x = 0$, also am Eingang der Leitung, finden wir

$$\begin{aligned} U(x=0) &= U_0 = A + B \\ ZI_0 &= A - B \end{aligned}$$

Somit ist

$$A = \frac{U_0 + ZI_0}{2} \quad B = \frac{U_0 - ZI_0}{2}.$$

Einsetzen in den Ansatz für die beiden Wellen ergibt

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{U_0 + ZI_0}{2} e^{-\gamma x} + \frac{U_0 - ZI_0}{2} e^{+\gamma x} \\ I(x) &= \frac{1}{Z} \left(\frac{U_0 + ZI_0}{2} e^{-\gamma x} - \frac{U_0 - ZI_0}{2} e^{+\gamma x} \right). \end{aligned}$$

Wir verwenden

$$\cosh(\alpha) = \frac{1}{2}(e^{+\alpha} + e^{-\alpha}), \quad \sinh(\alpha) = \frac{1}{2}(e^{+\alpha} - e^{-\alpha})$$

und erhalten

$$\begin{aligned} U(x) &= U_0 \cosh(\gamma x) - I_0 Z \sinh(\gamma x) \\ I(x) &= -\frac{U_0}{Z} \sinh(\gamma x) + I_0 \cosh(\gamma x). \end{aligned}$$

Diese Darstellung entspricht einer inversen Kettenmatrix,

$$\begin{pmatrix} U(x) \\ I(x) \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} U_0 \\ I_0 \end{pmatrix},$$

mit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh(\gamma x) & -Z \sinh(\gamma x) \\ -\frac{1}{Z} \sinh(\gamma x) & \cosh(\gamma x) \end{pmatrix}.$$

Die Kettenmatrix A selber finden wir, wenn wir $\det A = 1$ berücksichtigen und bemerken, dass die

beiden Diagonalelemente gleich sind: wir müssen die Außerdiagonalelemente mit -1 multiplizieren:

$$A = \begin{pmatrix} \cosh(\gamma x) & Z \sinh(\gamma x) \\ \frac{1}{Z} \sinh(\gamma x) & \cosh(\gamma x) \end{pmatrix}.$$

Diese Kettenmatrix verwenden wir jetzt zur Berechnung der Eingangsimpedanz. Mit $U(x) = R_B I(x)$ erhalten wir für $R_1 = U_0/I_0$

$$R_1 = \frac{A_{11}R_B + A_{12}}{A_{21}R_B + A_{22}} = \frac{R_B \cosh(\gamma x) + Z \sinh(\gamma x)}{\frac{R_B}{Z} \sinh(\gamma x) + \cosh(\gamma x)}.$$

Wir erweitern mit $Z/\cosh(\gamma x)$ und setzen $x \rightarrow l$ und erhalten

$$R_1 = Z \frac{R_B + Z \tanh(\gamma l)}{Z + R_B \tanh(\gamma l)}.$$

Für geringe Dämpfung, $\alpha \rightarrow 0$, wird $\gamma \rightarrow i\beta$. Mit Hilfe von

$$\tanh(i\beta) = i \tan(\beta)$$

kann dies geschrieben werden als

$$R_1 = Z \frac{R_B + iZ \tan(\beta l)}{Z + iR_B \tan(\beta l)}.$$

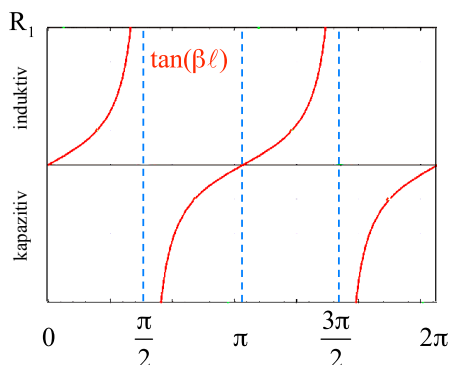


Abbildung 4.11: Impedanz des Leiters inklusive Abschlusswiderstand: $\tan(\beta l)$ als Funktion von βl .

Abbildung 4.11 zeigt den Verlauf von $\tan(\beta l)$ als Funktion der Länge des Leiterstückes in Einheiten $\beta l = 2\pi\lambda$: Der Wert 2π entspricht gerade einer Wellenlänge. Je nach Länge des Leiterstückes ist die resultierende Impedanz kapazitiv oder induktiv. Lediglich für Leiterstücke, deren Länge ein Vielfaches der halben Wellenlänge ist, entspricht die Eingangsimpedanz dem Abschlusswiderstand.

4.3.2 Spezialfälle : Kabellänge

Kurze Leitung

Wir betrachten zunächst den Spezialfall kurzer Leitungen, d.h. Leitungen die kurz sind im Vergleich zur Wellenlänge:

$$\beta l = 2\pi \frac{l}{\lambda} \ll 1.$$

Dies entspricht $\tan(\beta l) \rightarrow 0$, d.h.

$$R_1 = Z \frac{R_B + 0}{Z + 0} = R_B.$$

In diesem Fall ist der Einfluss des Kabels offenbar vernachlässigbar.

$\lambda/2$ Kabel

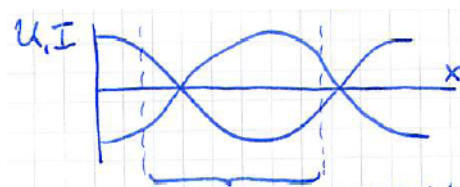


Abbildung 4.12: Eine Verschiebung um eine halbe Wellenlänge ändert nicht die Impedanz.

Hier betrachten wir den Fall $\beta l = n\pi$, mit n eine ganze Zahl. In diesem Fall verschwindet der $\tan(n\pi) = 0$. Auch hier gilt offenbar $R_1 = R_B$, d.h. der Einfluss des Kabels verschwindet. Diese Möglichkeit wird in vielen Fällen ausgenutzt, ist aber natürlich frequenzabhängig..

4.3.3 Spezielle Abschlusswiderstände

Kurzschluss : $R_B = 0$

Verschwindet der Lastwiderstand, $R_B = 0$, wird

$$R_1 = iZ \tan(\beta l).$$

Für kurze Leitungen, $0 < \beta l < \pi/2$ wird der Imaginärteil von $R_{1,0}$ positiv. Dies bedeutet, dass kurze kurzgeschlossene Leitungen induktiv wirken.

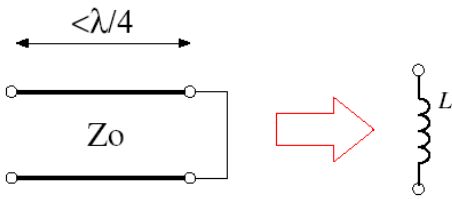


Abbildung 4.13: Eine kurze kurzgeschlossene Leitung wirkt induktiv.

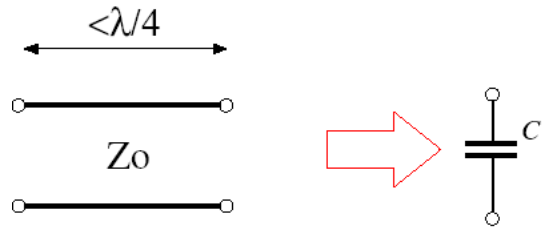


Abbildung 4.15: Eine kurze offene Leitung wirkt kapazitiv.

Für $l = n\lambda/4$ mit n ungerade wird der \tan unendlich und damit auch $|R_{1,0}| \rightarrow \infty$. Dies kann auch als eine Kabelresonanz interpretiert werden, bei der das Kabel einem Parallel-Schwingkreis aus L und C entspricht: dessen Impedanz geht auf der Resonanz gegen unendlich.

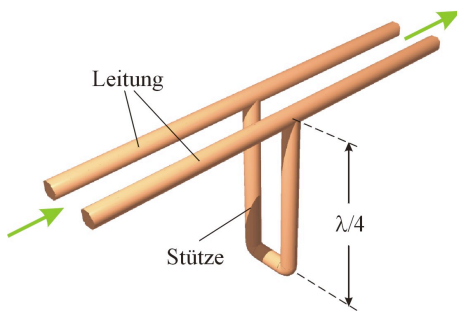


Abbildung 4.14: Hochohmige Unterstüzung einer Leitung.

Dies kann z.B. verwendet werden, um eine Verbindung zu einer Leitung hochohmig zu machen.

Offenes Ende

Für einen unendlichen Lastwiderstand, $R_B \rightarrow \infty$, wird die Eingangsimpedanz

$$\begin{aligned} R_{1,\infty} &= Z \lim_{R_B \rightarrow \infty} \frac{1 + iZ/R_B \tan(\beta l)}{Z/R_B + i \tan(\beta l)} \\ &= \frac{Z}{i \tan(\beta l)} = -iZ \cot(\beta l). \end{aligned}$$

Offenbar ist für $l \ll \lambda$ der Imaginärteil der Impedanz negativ, d.h. die Leitung wirkt wie eine Kapazität.

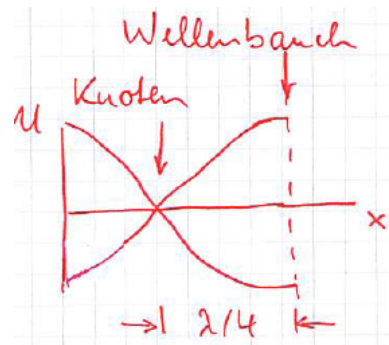


Abbildung 4.16: Im Abstand von $\lambda/4$ verschwindet die Spannung.

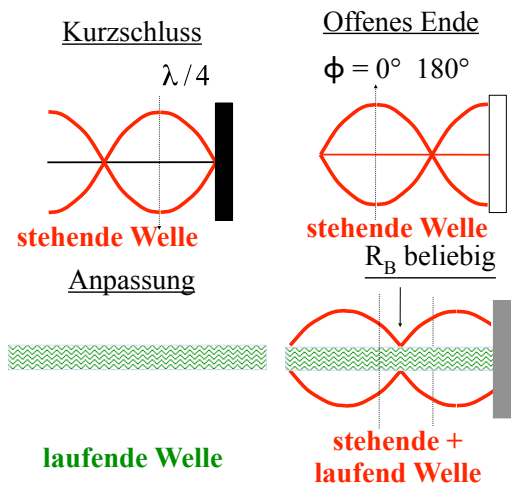
Für $l = \lambda/4$ wird $\cot(\beta l) = 0$, d.h. ein solches Kabel transformiert das offene Ende in einen Kurzschluss. Da diese Transformation frequenzabhängig ist, kann sie wiederum als Serien-Schwingkreis verstanden werden und man kann dies z.B. für die Herstellung eines Filters verwenden.

Anpassung

Wird die Leitung mit der charakteristischen Impedanz abgeschlossen, $R_B = Z$, dann wird $R_{1,Z} = Z$, unabhängig von der Länge der Leitung. In diesem Fall verschwindet die reflektierte Welle.

4.4 Reflexion

Reflexionen treten immer dann auf, wenn der Wellenwiderstand ändert. Dies gilt nicht nur, aber auch für elektrische Wellen. Wir betrachten hier den eindimensionalen Fall, mit einer Diskontinuität bei $x = 0$.



Auflösen nach Γ ergibt

$$\Gamma = \frac{U^-}{U^+} = \frac{R-Z}{R+Z} = |\Gamma|e^{i\varphi}.$$

4.4.2 Stehwellenverhältnis

Der Reflexionskoeffizient kann experimentell gemessen werden über das Stehwellenverhältnis (VSWR = 'Voltage Standing Wave Ratio':

$$\text{VSWR} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}}.$$

Mit

$$U_{\max} = |U^+| + |U^-| \quad U_{\min} = |U^+| - |U^-|$$

wird

$$\text{VSWR} = \frac{U^+ + U^-}{U^+ - U^-} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}.$$

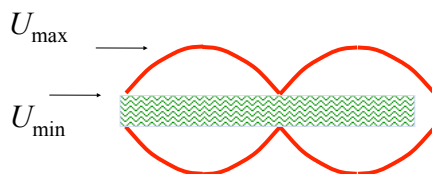


Abbildung 4.19: Definition von U_{\min}, U_{\max} .

Hier stellen U_{\min} und U_{\max} die Spannungsamplituden beim Knoten und Bauch der Stehwelle dar. Verschwindet der Reflexionskoeffizient, $\Gamma = 0$, so erhält man lediglich eine laufende Welle, also keine Knoten, und $U_{\min} = U_{\max}$. Eine weitere Möglichkeit, den Reflexionskoeffizienten zu bestimmen, ist die Messung der Impedanz: der Reflexionskoeffizient ergibt sich aus dem Verhältnis

$$\frac{Z/Z_0 - 1}{Z/Z_0 + 1} = \Gamma = |\Gamma|e^{i\varphi}.$$

Er verschwindet somit wenn $Z = Z_0$, d.h. wenn der Abschlusswiderstand gerade gleich der charakteristischen Impedanz des Kabels ist. Für $Z \rightarrow 0$ wird $\Gamma \rightarrow -1$ und bei $Z \rightarrow \infty$ geht $\Gamma \rightarrow 1$. Ein negativer Reflexionskoeffizient bedeutet, dass die reflektierte Welle in der Phase um π verschoben ist.

Abbildung 4.17: Übersicht über verschiedene Fälle bei Reflexion elektrischer Wellen.

4.4.1 Reflexionskoeffizient

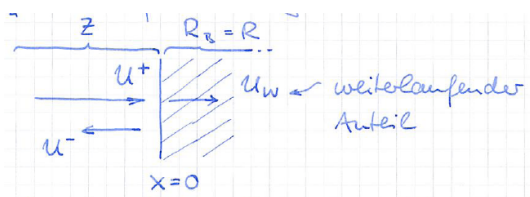


Abbildung 4.18: Einlaufende, reflektierte und transmittierte Wellen.

Wir berechnen den Reflexionskoeffizienten $\Gamma = U^-/U^+ =$ rücklaufende Welle / hinlaufende Welle. Der Reflexionskoeffizient kann berechnet werden aus der Randbedingung, dass die Signalamplituden bei $x = 0$, d.h. beim Ort der Reflexion, stetig sein sollen. Für die Spannung gilt

$$U^+ + U^- = U_w,$$

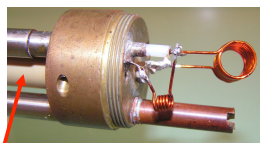
und für den Strom

$$\frac{U^+}{Z} - \frac{U^-}{Z} = \frac{U_w}{R}.$$

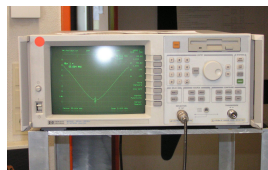
Wir dividieren die beiden Gleichungen und erhalten

$$\frac{U^+ + U^-}{U^+ - U^-} = \frac{R}{Z}.$$

Abstimmung eines LC-Schwingkreises



Dielektrikum eines Zylinderkondensators



Netzwerkanalysator

Abbildung 4.20: Abstimmung eines Schwingkreises.

Die kann z.B. verwendet werden, um die Abstimmung eines Schwingkreises zu überprüfen.

Der Schwingkreis soll so angepasst werden, dass seine Impedanz der charakteristischen Impedanz der Leitung ($=50 \Omega$) entspricht. Ist diese Bedingung für eine bestimmte Frequenz erfüllt, so verschwindet die Reflexion für die entsprechende Frequenz. In der Abbildung wird der Reflexionskoeffizient als Funktion der Frequenz gemessen; im Zentrum wird er minimal.

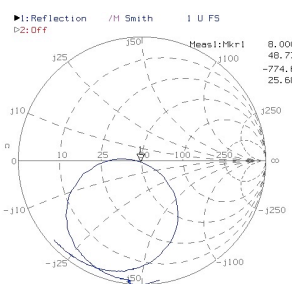
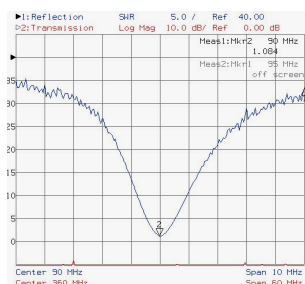


Abbildung 4.21: Abstimmung eines Schwingkreises.

Abbildung 4.21 zeigt den gemessenen Reflexionskoeffizienten auf einer logarithmischen (dB) Skala. In der rechten Hälfte ist die komplexe Impedanz für den gleichen Frequenzbereich in der Smith-Diagramm Darstellung gezeigt. Auf der Resonanz (markiert durch das Dreieck) erreicht die Impedanz gerade das Zentrum des Smith-Diagramms, $Z_0 = 50 \Omega$.

4.4.3 Der $\lambda/4$ Transformator

Trifft Licht auf eine Grenzfläche zwischen Medien mit unterschiedlichem Brechungsindex, so wird es

teilweise reflektiert. Dies kann man mit einer Antireflexbeschichtung verhindern. In der Elektronik werden Wellen beim Übergang zwischen unterschiedlichen Wellenimpedanzen reflektiert. Dies kann man für monochromatische Signale durch einen $\lambda/4$ Transformator vermeiden. Man benötigt dafür ein Leiterstück der Länge $\lambda/4$, dessen Impedanz

$$Z_0^T = \sqrt{Z_0^1 Z_0^2}$$

beträgt. Hier beziehen sich die oberen Indizes ¹, ² und ^T auf die Eingangsleitung, Ausgangsleitung und den Transformator.

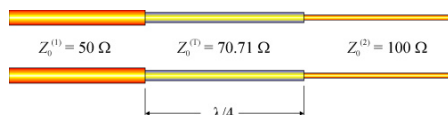


Abbildung 4.22: $\lambda/4$ Transformator.

Als Beispiel können wir die Transformation von einer 50Ω auf eine 100Ω Leitung betrachten: Hier muss der Transformator die Impedanz

$$Z_0^T = \sqrt{Z_0^1 Z_0^2} = 70,7 \Omega$$

aufweisen.

4.4.4 Übertragung von Pulsen

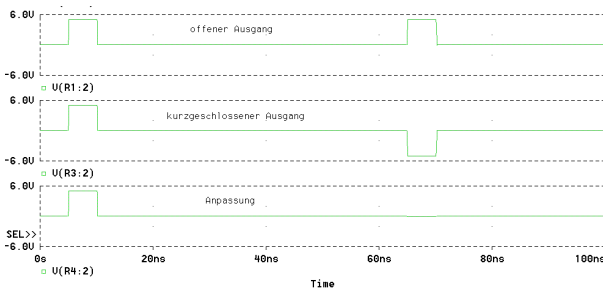


Abbildung 4.23: Puls, der durch ein Kabel mit unterschiedlichen Abschlusswiderständen läuft. Oben: $R=\infty$; mitte : $R = 0$; unten: $R = 50 \Omega$.

Bei einem offenen wie bei einem kurzgeschlossenen Ende wird die Welle vollständig reflektiert. Dies

ist in Abb. 4.23 dargestellt: der erste Puls ist der einlaufende Puls, der zweite der reflektierte Puls. Der Abstand ist gegeben durch die doppelte Laufzeit durch das Kabel. Bei kurzgeschlossenem Ausgang ist die Phase der zurücklaufenden Welle im Vergleich zur einlaufenden Welle um 180 Grad gedreht ($\Gamma = -1$). Bei angepasstem Abschlusswiderstand wird nichts reflektiert.

Die Reflexion an einem kurzgeschlossenem Kabel ($\Gamma = -1$) kann verwendet werden, um aus Pulsen mit einer langen abfallenden Flanke zu kurzen Pulsen umzuformen. Dies geschieht, indem man eine kurze, kurzgeschlossene Leitung an den Signalpfad befestigt. Der Puls läuft dann in diese Leitung hinein, und der zurücklaufende Puls kompensiert das Signal auf 0. Lediglich während der Zeit, die der Puls benötigt, um von der Verzweigung zum Kurzschluss und wieder zurück zu laufen, erhält man einen kurzen Puls.

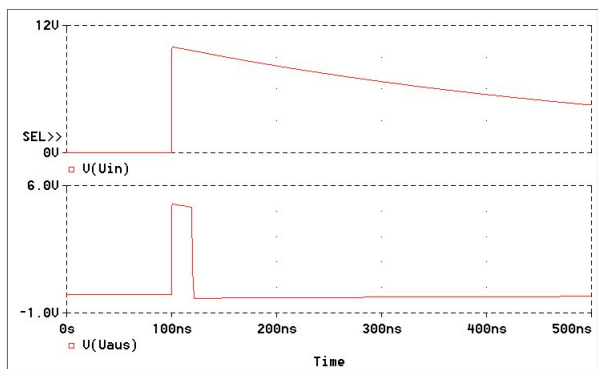


Abbildung 4.24: Puls, der durch ein kurzgeschlossenes Kabel erzeugt wurde.

Abbildung 4.24 zeigt einen 20 ns langen Puls, der (in der Simulation) durch ein kurzgeschlossenes Kabel mit einer Länge von 10 ns = 2 m erzeugt wurde.

4.5 Netzwerkanalyse

4.5.1 Problemstellung

Bei der Netzwerkanalyse geht es darum, eine unbekannte Impedanz R zu messen, wobei man diese nicht direkt in das Messgerät hinein bringen

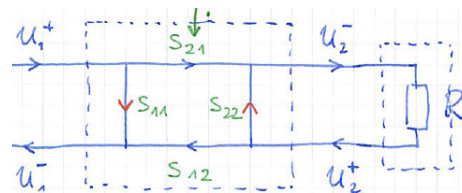


Abbildung 4.25: Übertragung der Impedanz einer zu messenden Last.

kann, sondern für die Messung eine Leitung verwendet, deren Eigenschaften ebenfalls nicht genau bekannt sind. Man findet deshalb mehrere Reflexionen, z.B. einen Reflexionskoeffizienten $\Gamma_1 = U_1^- / U_1^+$ und $\Gamma_2 = U_2^- / U_2^+$. Von R aus betrachtet hat man den Reflexionskoeffizienten $\Gamma_R = U_2^+ / U_2^-$.

4.5.2 Streumatrix

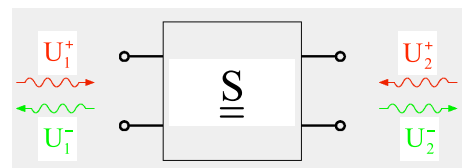


Abbildung 4.26: Streumatrix S .

Man beschreibt den Vierpol zwischen Messgerät und Last mit Hilfe der Streumatrix S :

$$\begin{pmatrix} U_1^- \\ U_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^+ \\ U_2^+ \end{pmatrix}.$$

Ihre Elemente sind die S-Parameter:

- Reflektanz: $S_{11} = \left. \frac{U_1^-}{U_1^+} \right|_{U_2^+=0}$, $S_{22} = \left. \frac{U_2^-}{U_2^+} \right|_{U_1^+=0}$,
- Transmittanz: $S_{21} = \left. \frac{U_2^-}{U_1^+} \right|_{U_2^+=0}$, $S_{12} = \left. \frac{U_1^-}{U_2^+} \right|_{U_1^+=0}$.

Die Diagonalelemente S_{11} und S_{22} bezeichnen die Reflexionsfaktoren Γ_1 am Eingang und Γ_2 am Ausgang., die Außerdiagonalelemente die Verstärkung in Rückwärts, resp. Vorwärtsrichtung. Das Quadrat der Transmittanz, $|S_{jk}|^2$ quantifiziert die Leistungsübertragung zwischen Tor k und j . Die Leitung ist Übertragungssymmetrisch, $S_{12} = S_{21}$.

Damit kann Γ_1 als Funktion von Γ_R berechnet werden:

$$U_1^- = S_{11}U_1^+ + S_{12}U_2^+ \rightarrow \frac{U_1^-}{U_1^+} = S_{11} + S_{12} \frac{U_2^+}{U_1^+} = \Gamma_1$$

$$U_2^- = S_{21}U_1^+ + S_{22}U_2^+ \rightarrow \frac{U_2^-}{U_2^+} = S_{21} \frac{U_1^+}{U_2^+} + S_{22} = \Gamma_R^{-1}$$

Aus der 2ten Gleichung erhalten wir

$$\frac{U_1^+}{U_2^+} = \frac{\Gamma_R^{-1} - S_{22}}{S_{21}} = \frac{1 - S_{22}\Gamma_R}{S_{21}\Gamma_R}$$

Durch Einsetzen in der ersten Gleichung erhalten wir

$$\Gamma_1 = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_R}{1 - S_{22}\Gamma_R}$$

Dieser Ausdruck enthält 4 unbekannte Größen, die wir durch 4 Messungen bestimmen können. So können z.B. 4 Messungen mit Abschlusswiderständen $R = \{0, \infty, 50\Omega, R\}$ durchgeführt werden.

4.5.3 Transfermatrix

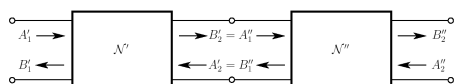


Abbildung 4.27: Transfermatrix T .

Anstelle der S -Matrix kann auch die T -Matrix verwendet werden. Sie ist definiert über die Beziehung

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

Sie kann aus der S -Matrix berechnet werden als

$$(T) = \frac{1}{S_{21}} \begin{pmatrix} -\Delta S & S_{11} \\ -S_{22} & 1 \end{pmatrix}$$

Die T -Matrix hat den Vorteil, dass die T -Matrix von zwei hintereinander geschalteten Vierpolen als Produkt schreiben kann, $T = T'T'''$.

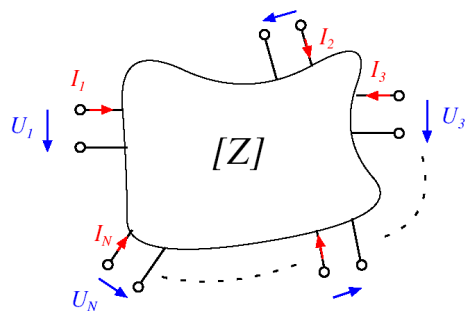


Abbildung 4.28: N-Tore.

4.5.4 N-Tore

Das Prinzip kann auf größere Systeme verallgemeinert werden. So kann man eine Impedanzmatrix für ein System mit N Eingängen schreiben als

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1N} \\ Z_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ Z_{N1} & \cdots & \cdots & Z_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix}$$

Ebenso kann man die Streumatrix verallgemeinern:

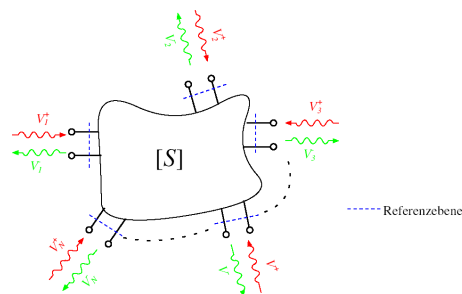


Abbildung 4.29: N-Tore.

Die verallgemeinerte Streumatrix lautet dann

$$\begin{pmatrix} U_1^- \\ U_2^- \\ \vdots \\ U_N^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1N} \\ S_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ S_{N1} & \cdots & \cdots & S_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^+ \\ U_2^+ \\ \vdots \\ U_N^+ \end{pmatrix}$$

Beispiele von N-Toren umfassen z.B. für $N = 3$ den Leistungsteiler und den Zirkulator oder für $N = 4$ den Richtkoppler oder das "Magische T".