

3 Vierpole

3.1 Matrixbeschreibung

Im vorhergehenden Kapitel hatten wir Zweipole diskutiert, also elektronische Bauteile mit 2 Anschlüssen.

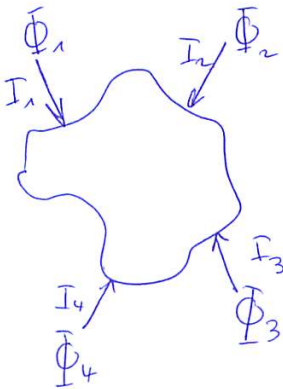


Abbildung 3.1: Allgemeinste Form eines Vierpols.

In diesem Kapitel diskutieren wir etwas komplexere Netzwerke, welche vier Anschlüsse aufweisen. Sie werden deshalb als ‘Vierpole’ bezeichnet.

3.1.1 Definition

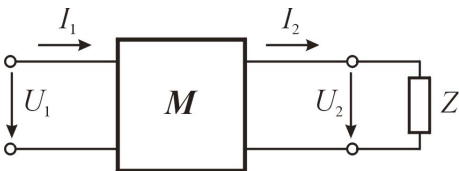


Abbildung 3.2: Zweitor.

Ein Vierpol kann als ein Netzwerk mit vier Anschlüssen bezeichnet werden. Wir konzentrieren uns hier auf Vierpole, bei denen jeweils zwei Anschlüsse als Eingang und zwei als Ausgang betrachtet werden können. Diese werden deshalb auch als ‘Zweitor’

bezeichnet. Ein Tor liegt dann vor, wenn der elektrische Strom durch die beiden Anschlüsse eines Tors gegengleich ist.

Die wichtigsten Größen für die Beschreibung des Netzwerkes sind die Spannungen U_1 am Eingang und U_2 am Ausgang, sowie der Eingangsstrom I_1 und der Ausgangsstrom I_2 . Diese Größen sind nicht unabhängig voneinander, sondern sie sind durch die Elemente des Vierpols aneinander gekoppelt:

$$U_1 = f_1(I_1, I_2) \quad \text{und} \quad U_2 = f_2(I_1, I_2). \quad (3.1)$$

Im Rahmen dieses Kapitels beschränken wir uns auf lineare Vierpole, d.h. wir nehmen an, dass zwischen den Strömen und Spannungen lineare Beziehungen existieren. Gleichung (3.1) kann dann geschrieben werden als

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ U_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dies erlaubt eine einfache Beschreibung mit den Methoden der linearen Algebra. Diese ist auch für nichtlineare Vierpole nützlich: auch dann ist es oft möglich, sie in der Umgebung eines Arbeitspunktes zu linearisieren und kleine Abweichungen vom Arbeitspunkt als lineare Vierpole zu beschreiben.

3.1.2 Widerstandsmatrix

In einem linearen Vierpol kann man immer zwei der relevanten Größen als Funktion der anderen zwei Größen darstellen. So haben wir in Gleichung (3.2) die beiden Spannungen als Funktion der Ströme geschrieben. In Matrixschreibweise lautet sie

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix (Z_{ik}) ist die Widerstandsmatrix. Für einen allgemeinen (nichtlinearen) Vierpol können die Elemente geschrieben werden als

- Primärer Leerlaufwiderstand $Z_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial I_1} |_{I_2=0}$;
- Kernwiderstand rückwärts $Z_{12} = \frac{\partial U_1}{\partial I_2} |_{I_1=0}$;
- Kernwiderstand vorwärts $Z_{21} = \frac{\partial U_2}{\partial I_1} |_{I_2=0}$;
- Sekundärer Leerlaufwiderstand $Z_{22} = \frac{\partial U_2}{\partial I_2} |_{I_1=0}$;

Durch die Widerstandsmatrix ist ein Netzwerk vollständig charakterisiert.

3.1.3 Weitere Matrizen

Anstatt die Ströme mit den Spannungen können wir auch die Eingangssignale mit den Ausgangssignalen verbinden:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix (A_{ik}) wird als Kettenmatrix bezeichnet.

Weitere mögliche Verknüpfungen sind die

- Leitwertmatrix Y :

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}.$$

- Hybridmatrix H

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix}.$$

Diese finden je nach Schaltung Anwendung und können ineinander überführt werden. So gilt z.B. offensichtlich $YZ = 1$. Damit kann Y aus Z berechnet werden:

$$Y = \frac{1}{\Delta Z} \begin{pmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{pmatrix}.$$

Die Motivation für die Verwendung dieser Beschreibung liegt darin, dass sie einem erlaubt, das Verhalten der entsprechenden Schaltungen zu diskutieren, ohne dass man die Details ihres Aufbaus kennen muss; man kann sie als 'black box' beschreiben. Voraussetzung ist natürlich, dass man die Matrixelemente kennt - entweder aus theoretischen Berechnungen (und dafür muss man den Aufbau der Schaltung kennen) oder aus experimentellen Messungen. Wie betrachten deshalb anhand eines Beispiels, wie man die Matrixelemente bestimmen kann.

3.1.4 Matrixelemente für RC-Tiefpass

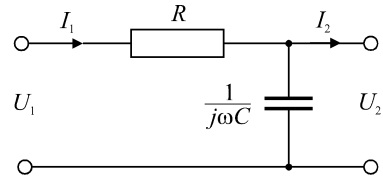


Abbildung 3.3: RC-Tiefpass.

Wie wir bereits diskutiert hatten, ist die Übertragungsfunktion des RC-Tiefpasses für den Fall eines offenen Ausganges (d.h. $I_2 = 0$),

$$U_2 = \frac{U_1}{1 + i\omega RC}.$$

Gleichzeitig ist der Eingangsstrom für diesen Fall

$$I_1 = \frac{U_1}{R + \frac{1}{i\omega C}} = i\omega C U_2.$$

Um die 4 Matrixelemente zu bestimmen, benötigen wir 2 weitere Gleichungen. Diese erhalten wir z.B., indem wir den Fall betrachten, dass der Ausgang kurzgeschlossen ist, d.h. $U_2 = 0$. In diesem Fall ist der Kondensator kurzgeschlossen und damit wird

$$I_2 = I_1.$$

Damit gilt für diesen Fall auch

$$U_1 = R I_1 = R I_2.$$

Somit werden die Matrixelemente der Kettenmatrix

$$A_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial U_2} |_{I_2=0} = 1 + i\omega RC$$

$$A_{12} = \frac{\partial U_1}{\partial I_2} |_{U_2=0} = R$$

$$A_{21} = \frac{\partial I_1}{\partial U_2} |_{I_2=0} = i\omega C$$

$$A_{22} = \frac{\partial I_1}{\partial I_2} |_{U_2=0} = 1.$$

Damit wird die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 + i\omega RC & R \\ i\omega C & 1 \end{pmatrix}.$$

Ihre Determinante ist

$$\det A = 1 + i\omega RC - i\omega RC = 1.$$

Das hier verwendete Verfahren, bei dem wir Beziehungen zwischen Strömen und Spannungen für die beiden Fälle von offenem und kurzgeschlossenem Eingang bestimmt haben, eignet sich nicht nur für die theoretische Analyse, sondern ebenso für experimentelle Bestimmungen, also für Messungen.

3.1.5 Verknüpfung von Vierpolen

Die algebraische Beschreibung ist vor allem dann nützlich, wenn wir mehrere Vierpole aneinander koppeln und aus zwei bekannten Vierpolen einen neuen Vierpol aufbauen. Wir möchten dann die Eigenschaften dieses neuen, kombinierten Vierpols aus den Eigenschaften der einzelnen Vierpole, sowie den Angaben über die Art der Verknüpfung ableiten können.

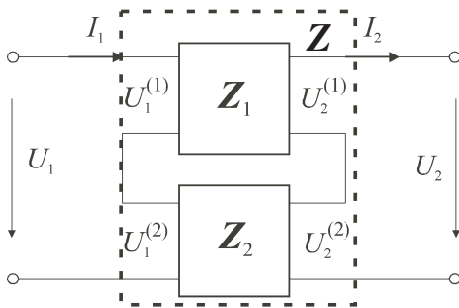


Abbildung 3.4: Verknüpfung von 2 Vierpolen

Abbildung 3.4 zeigt ein Beispiel. In diesem Fall sind die Ströme für beide Vierpole gleich,

$$I_1^{(1)} = I_1^{(2)} = I_1 \quad I_2^{(1)} = I_2^{(2)} = I_2$$

während die Spannungen sich addieren,

$$U_1 = U_1^{(1)} + U_1^{(2)} \quad U_2 = U_2^{(1)} + U_2^{(2)}.$$

Hier beziehen sich die Größen ohne oberen Index jeweils auf das Gesamtsystem, die Größen mit einem oberen Index auf das jeweilige Teilsystem. Es handelt sich somit um eine Reihenschaltung. Bei der Reihenschaltung von Zweipolen addieren sich die Widerstände, bei der Reihenschaltung von Vierpolen addieren sich die Widerstandsmatrizen. Somit kann die

Widerstandsmatrix des Gesamtsystems geschrieben werden als die Summe der einzelnen Matrizen,

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = (Z_1 + Z_2) \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}.$$

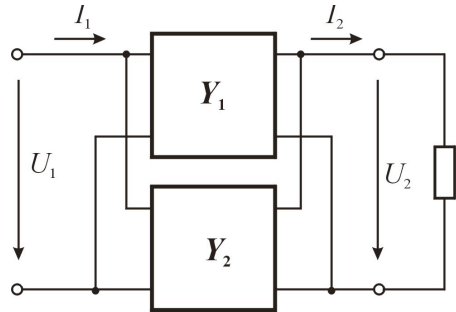


Abbildung 3.5: Parallelschaltung von 2 Vierpolen.

Schalten wir die beiden Vierpole parallel, d.h. sind die Spannungen gleich und die Ströme addieren sich, so können wir das Gesamtsystem beschreiben, indem wir die Leitwertmatrizen addieren:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = (Y_1 + Y_2) \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}.$$

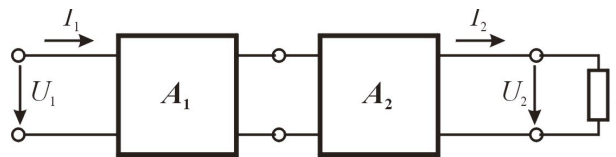


Abbildung 3.6: 2 Vierpole hintereinandergeschaltet.

In Abb. 3.6 werden die Ausgänge des ersten Vierpols mit den Eingängen des zweiten Vierpols verbunden. Diese Schaltung kann am einfachsten über die Kettenmatrix beschrieben werden. Nach ihrer Definition gilt für den ersten Vierpol

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = (A_1) \begin{pmatrix} U_x \\ I_x \end{pmatrix},$$

wobei der Index x sich auf die Werte zwischen den beiden Vierpolen bezieht. Unter Verwendung der Kettenmatrix (A_2) für den zweiten Vierpol wird dies zu

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = (A_1)(A_2) \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = (A_1 A_2) \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix},$$

d.h. wir können die beiden Kettenmatrizen multiplizieren. Da die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist,

$$(A_1A_2) \neq (A_2A_1) \quad \text{i.A.,}$$

ist es wichtig, in welcher Reihenfolge die Bauteile hintereinander geschaltet werden.

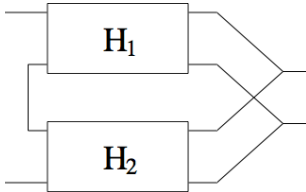


Abbildung 3.7: Hybridschaltung oder Parallelschaltung

3.1.6 Impedanztransformation

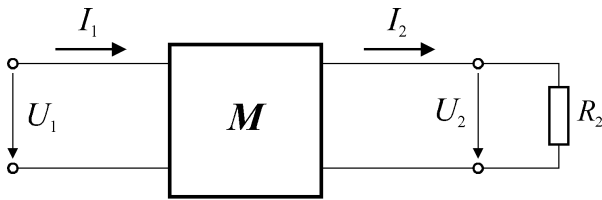


Abbildung 3.8: Impedanztransformation durch einen Vierpol.

Eine häufig auftretende Frage beim Bau von elektronischen Schaltungen lautet: Welche Impedanz $Z_1 = U_1/I_1$ sieht die Quelle, wenn das Netzwerk mit der Last $R_B = U_2/I_2$ abgeschlossen wird?

Mit der Kettenmatrix A finden wir

$$Z_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{A_{11}U_2 + A_{12}I_2}{A_{21}U_2 + A_{22}I_2}.$$

Wir kürzen mit I_2 und erhalten

$$Z_1 = \frac{A_{11}R_B + A_{12}}{A_{21}R_B + A_{22}}.$$

Offenbar wird R_B durch den Vierpol zu Z_1 transformiert.

Einige wichtige Spezialfälle sind hier der Leerlauf, d.h. $R_B \rightarrow \infty, I_2 \rightarrow 0$: Offenbar wird dann

$$Z_{1L} = \frac{A_{11}}{A_{21}}.$$

Im Fall eines Kurzschlusses, $R_B = 0$, wird

$$Z_{1K} = \frac{A_{12}}{A_{22}}.$$

Umgekehrt können wir fragen: Welche Impedanz $Z_2 = U_2/I_2$ sieht die Last von der Eingangsimpedanz $R_A = U_1/I_1$? Wir verwenden dafür die inverse Kettenmatrix

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$Z_2 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{A_{22}U_1 - A_{12}I_1}{-A_{21}U_1 + A_{11}I_1}.$$

Wir drehen jetzt den Vierpol um, d.h. wir betrachten die Seite mit U_2, I_2 als den Eingang. Dadurch wechselt das Vorzeichen der Ströme und somit wird die Impedanz in dieser Richtung

$$Z_2 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{A_{22}U_1 + A_{12}I_1}{A_{21}U_1 + A_{11}I_1}.$$

oder, nach Kürzen mit I_1 ,

$$Z_2 = \frac{A_{22}R_A + A_{12}}{A_{21}R_A + A_{11}}.$$

3.1.7 Widerstandssymmetrische Netzwerke

Die beiden oben berechneten Impedanztransformationen sind identisch, $Z_1 = Z_2$, falls $A_{11} = A_{22}$. In diesem Fall wird ein Widerstand $R = R_A = R_B$ in beiden Richtungen auf die gleiche Impedanz Z transformiert. Man spricht in diesem Fall von widerstandssymmetrischen Netzwerken. Ein wichtiges Beispiel sind Übertragungsleitungen. Diese besitzen einen ausgezeichneten, den sog. Wellenwiderstand. Für diesen ist $R = Z$, d.h. der Leiter ändert die Impedanz nicht, falls die Leitung mit dem korrekten Wellenwiderstand abgeschlossen ist. Offenbar gilt dann

$$Z_0 = \frac{A_{11}Z_0 + A_{12}}{A_{21}Z_0 + A_{11}}.$$

Daraus folgt

$$Z_0 = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}}$$

Offenbar kann man das beliebig häufig wiederholen, d.h. beliebig viele solche Netzwerke hintereinander schalten, ohne die Impedanz zu verändern. Dies ist wichtig für die Signalübertragung, da Änderungen der Impedanz immer zu Reflexionen führe. In der Hochfrequenztechnik verwendet man häufig einheitlich $Z_0 = 50 \Omega$.

Durch Vergleich dieses Ausdrucks mit den Impedanzen für Kurzschluss und Leerlauf sieht man

$$Z_0 = \sqrt{Z_{1K}Z_{1L}}$$

d.h. die charakteristische Impedanz ist gleich dem geometrischen Mittel aus Leerlauf- und Kurzschlussimpedanz. Die Messung der Kurzschluss- und Leerlaufimpedanz ist somit eine Möglichkeit für die Bestimmung des Wellenwiderstandes. Dieser entspricht außerdem dem Widerstand einer unendlich langen Kette von widerstandssymmetrischen Vierpolen.

3.2 Übergangssymmetrische Vierpole

Übergangssymmetrische Vierpole (auch reziprok genannt) übertragen genau so viel Leistung von links nach rechts wie umgekehrt. Passive Vierpole sind immer reziprok, aktive (z.B. Verstärker) im Allgemeinen nicht. Aus dieser Symmetriebedingung folgen Beziehungen zwischen den Matrixelementen. So gilt für reziproke Vierpole $\det(A) = 1$ oder $Z_{12} = -Z_{21}$, d.h. es sind jeweils nur 3 Matrixelemente linear unabhängig.

3.2.1 Beispiele

Da die Matrizen 3 unabhängige Elemente enthalten, muss es möglich sein, übergangssymmetrische Vierpole aus 3 Elementen aufzubauen. Zwei äquivalente Möglichkeiten sind die π - und the T -Schaltung.

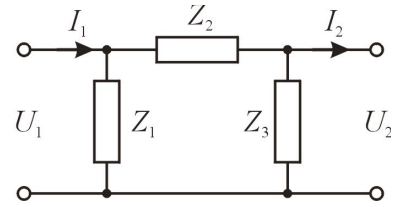


Abbildung 3.9: Übergangssymmetrisches π -Netzwerk.

Für die π -Schaltung erhält man für die Elemente der Kettenmatrix

$$A_{11} = \left. \frac{\partial U_1}{\partial U_2} \right|_{I_2=0} = \frac{Z_2 + Z_3}{Z_3}$$

$$A_{12} = \left. \frac{\partial U_1}{\partial I_2} \right|_{U_2=0} = Z_2$$

$$A_{21} = \left. \frac{\partial I_1}{\partial U_2} \right|_{I_2=0} = \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{Z_1 Z_3}$$

$$A_{22} = \left. \frac{\partial I_1}{\partial I_2} \right|_{U_2=0} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1}$$

Die Kettenmatrix ist somit

$$A_\pi = \begin{pmatrix} \frac{Z_2+Z_3}{Z_1+Z_2+Z_3} & Z_2 \\ \frac{Z_1+Z_2+Z_3}{Z_1 Z_3} & \frac{Z_1+Z_2}{Z_1} \end{pmatrix}$$

und ihre Determinante

$$\det(A) = \frac{(Z_2 + Z_3)(Z_1 + Z_2)}{Z_1 Z_3} - \frac{Z_2(Z_1 + Z_2 + Z_3)}{Z_1 Z_3} = 1.$$

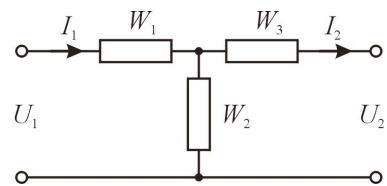


Abbildung 3.10: Übergangssymmetrisches T -Netzwerk.

Bei der T -Schaltung lautet die Kettenmatrix

$$A_T = \begin{pmatrix} \frac{W_1+W_2}{W_2} & \frac{W_1 W_2 + W_1 W_3 + W_2 W_3}{W_2} \\ \frac{1}{W_2} & \frac{W_2+W_3}{W_2} \end{pmatrix}$$

und ihre Determinante ist ebenfalls 1. Die beiden Schaltungen sind äquivalent sofern die Matrixelemente identisch sind.

3.2.2 Brückenschaltung

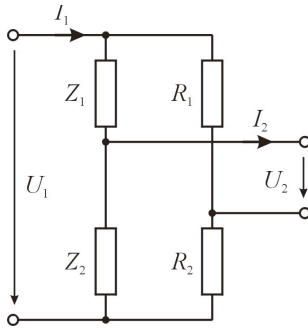


Abbildung 3.11: Kreuz- oder Brückenschaltung.

Kreuz- oder Brückenschaltungen sind Beispiele von übertragungssymmetrischen Vierpolen. Die Kettenmatrix für die gezeigte Schaltung ist

$$A = \begin{pmatrix} \frac{(R_1+R_2)(Z_1+Z_2)}{R_1Z_2-R_2Z_1} & \frac{R_2Z_2(R_1+Z_1)+R_1Z_1(R_2+Z_2)}{R_1Z_2-R_2Z_1} \\ \frac{R_1+Z_1+R_2+Z_2}{R_1Z_2-R_2Z_1} & \frac{(R_1+Z_1)(R_2+Z_2)}{R_1Z_2-R_2Z_1} \end{pmatrix}.$$

3.2.3 Gekoppelte RLC Schwingkreise

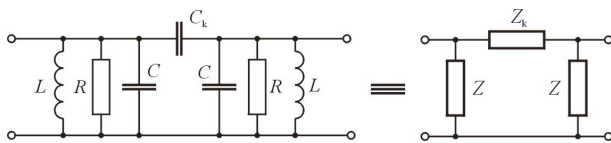


Abbildung 3.12: Gekoppelte RLC-Schwingkreise.

RLC Schwingkreise bilden Beispiele für passive, lineare, übertragungssymmetrische Vierpole. Die Impedanz der Schwingkreise ist

$$Z = \frac{i\omega L}{(1 - \omega^2 LC) + i\omega L/R}.$$

In der Abbildung sind zwei solche Schwingkreise über einen Koppelkondensator

$$Z_k = \frac{1}{i\omega C}$$

gekoppelt. Sie bilden damit ebenfalls eine π -Schaltung, wobei die Impedanzen hier komplex sind. Je nach Größe des Kopplungskondensators koppeln die beiden Schwingkreise mehr oder weniger stark aneinander. Das resultierende System hat nicht mehr nur eine, sondern zwei Resonanzfrequenzen.